

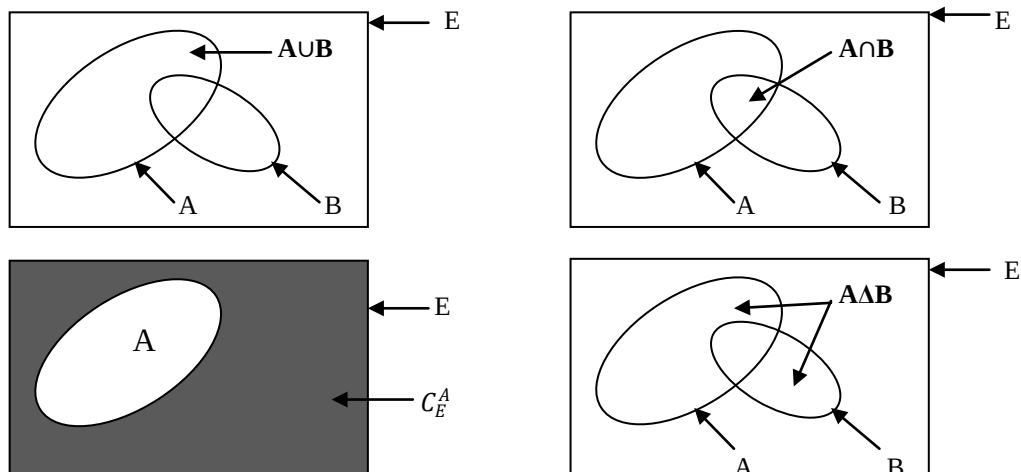
I- Dénombrement :

1) Vocabulaire de la théorie des ensembles :

Soit E un ensemble et soient A et B deux sous-ensembles de E .

- **Expérience aléatoire** : expérience dont le résultat dépend du hasard.
- **Eventualité** : résultat possible d'une expérience aléatoire.
- **Univers ou CardE** = n : ensemble de toutes les éventualités d'une expérience aléatoire.
- **Événement** : sous-ensemble de l'univers.
- **Événement élémentaire** : événement réduit à un seul élément.
- **Union de deux ensembles**: Soient A et B deux ensembles finis. On appelle Union de A et B , l'ensemble des éléments de A ou B . On note : $A \cup B = \{x/x \in A \text{ ou } x \in B\}$
- **Intersection de deux ensembles** : L'intersection de deux ensembles A et B regroupent les éléments communs à A et B . On note : $A \cap B = \{x/x \in A \text{ et } x \in B\}$.
- **Différence A moins B** : On appelle différence A moins B , l'ensemble noté $A - B$ tel que : $A - B = \{x \in E; x \in A \text{ et } x \notin B\}$.
- **Différence symétrique de A et B** : On appelle différence symétrique de A et B , l'ensemble noté $A \Delta B$ tel que : $A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$
- **Produit cartésien de A par B** : On appelle produit cartésien de A par B l'ensemble des couples $(x; y)$ tel que : x appartient à A et y appartient à B . On note : $A \times B = \{(x; y)/ x \in A \text{ et } y \in B\}$.
- **Évènement contraire de A ou complémentaire de A dans E** : On appelle évènement contraire de A , l'ensemble de toutes les issues de E n'appartenant pas à A . On la note : $\bar{A}$ tel que : $\bar{A} = C_E(A) = \{x/x \in E \text{ et } x \notin A\} = \{x/x \in E \text{ et } x \in \bar{A}\}$.

Illustration



2) Propriétés sur les ensembles finis

Soient A ; B et C trois ensembles finis. On admet les propriétés suivantes :

- Propriétés relatives à $\cup$

$$\underline{P}_1 : A \cup \emptyset = \emptyset \cup A = A \quad (\emptyset \text{ est neutre pour } \cup)$$

$$\underline{P}_2 : A \cup A = A \quad (\text{tout element de l'ensemble } E \text{ est idempotent pour } \cup)$$

$$\underline{P}_3 : A \cup E = E \quad (L'ensemble E \text{ est absorbant pour } \cup)$$

$$\underline{P}_4 : A \cup B = B \cup A \quad (\cup \text{ est commutative})$$

$$\underline{P}_5 : (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) \quad (\cup \text{ est associative})$$

$$\underline{P}_6 : A \cup B = B \Leftrightarrow A \subset B$$

- Propriétés relatives à $\cap$

$$\underline{P}_1 : A \cap \emptyset = \emptyset \cap A = \emptyset \quad (\emptyset \text{ est absorbant pour } \cap)$$

$$\underline{P}_2 : A \cap A = A \quad (\text{tout element de l'ensemble } E \text{ est idempotent pour } \cap)$$

$$\underline{P}_3 : A \cap E = A \quad (E \text{ est neutre pour } \cap)$$

$$\underline{P}_4 : A \cap B = B \cap A \quad (\cap \text{ est commutative})$$

$$\underline{P}_5 : (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) \quad (\cap \text{ est associative})$$

$$\underline{P}_6 : A \cap B = A \Leftrightarrow A \subset B$$

- Propriétés relatives à $A - B$; $C_E(A)$ et $A \Delta B$

$$\underline{P}_1 : A - B \Leftrightarrow A \subset B$$

$$\underline{P}_2 : A - B = A \cap C_E(B) = A - (A \cap B)$$

$$\underline{P}_3 : A \Delta B = B \Delta A \quad (\Delta \text{ est commutative})$$

$$\underline{P}_4 : A \Delta \emptyset = A \quad (\emptyset \text{ est neutre pour } \Delta)$$

$$\underline{P}_5 : A \Delta A = \emptyset \quad (\text{tout element de l'ensemble } E \text{ est son symétrique pour } \Delta)$$

$$\underline{P}_6 : A \Delta B = (A \cup B) - (A \cap B)$$

$$\underline{P}_7 : C_E(A \cup B) = C_E(A) \cap C_E(B) \text{ et } C_E(A \cap B) = C_E(A) \cup C_E(B) \quad (\text{lois de Morgan})$$

- **Propriétés relatives à $A \times B$**

Soient A ; B et C trois ensembles

P₁ : $A \times B \neq B \times A$ (*le produit cartésien n'est pas commutatif*)

P₂ : $A \times B = \emptyset \Leftrightarrow A = \emptyset$ ou $B = \emptyset$

P₃ : $A \times B = B \times A \Leftrightarrow A = \emptyset$ ou $B = \emptyset$ ou $A = B$

P₄ : $(A \times B) \cup (A \times C) = A \times (B \cup C)$

P₅ : $(A \times B) \cup (C \times B) = (A \cup C) \times B$

P₆ : $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$

- **Propriétés relatives à $\cup$ et $\cap$**

P₁ : $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ (*distributivité de $\cap$ par rapport à $\cup$*)

P₂ : $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ (*distributivité de $\cup$ par rapport à $\cap$*)

P₃ : $A \cap (A \cup B) = A \cup (A \cap B) = A$ (*égalités modulaires*)

P₄ : $(\overline{A \cup B}) = (\overline{A} \cap \overline{B})$ et $(\overline{A \cap B}) = (\overline{A} \cup \overline{B}) = (A \cap B)$

P₅ : $(\overline{A \cap B}) = (\overline{A} \cup \overline{B})$ et $(\overline{A \cup B}) = (\overline{A} \cap \overline{B}) = (A \cup B)$

- **Propriétés relatives à $\text{card}E$**

P₁ : $\text{Card}\emptyset = 0$

P₂ : $\text{Card}(A \cup B) = \text{Card } A + \text{Card } B - \text{Card}(A \cap B)$ si $A \cap B \neq \emptyset$

P₃ : $\text{Card}(A \cup B) = \text{Card } A + \text{Card } B$ si $A \cap B = \emptyset$

P₄ : $\text{Card}(A \cap B) = \text{Card } A + \text{Card } B - \text{Card}(A \cup B)$

P₅ : $\text{Card}(A \times B) = \text{Card } A \times \text{Card } B$

P₆ : $\text{Card}C_E^A = \text{Card } E - \text{Card } A$

P₇ : $A \cup \overline{A} = \Omega$ et $A \cap \overline{A} = \emptyset$

3) Permutation–Arrangement – combination – P-liste

a) Permutation :

• Définition :

On appelle permutation d'un ensemble fini F de cardinal n , toute bijection de $[1 ; n]$ dans F .
Le nombre de permutation d'un ensemble fini de cardinal n est noté : $n!$ et on lit **Factorielle n**
telque : $n! = n(n-1)(n-2) \dots \times 2 \times 1$

- Propriétés : $P_1: 0! = 1$; $P_2: 1! = 1$; $P_3: 2! = 2$

b) Arrangement :

• Définition:

Soit E un ensemble à n éléments, et P un ensemble fini tel que : $(n \geq P)$.
On appelle arrangement de P éléments de E , toute injection de P dans E .
On le note : A_n^P et on lit : « A, n, P ».

$$A_n^P = n(n-1)(n-2) \dots (n-p+1) \quad \text{ou} \quad A_n^P = \frac{n!}{(n-p)!}$$

- Propriétés:

$$P_1: A_n^0 = 1 \quad ; \quad P_2: A_n^1 = n \quad ; \quad P_3: A_n^n = n! \quad ; \quad P_4: A_n^{n-1} = n!$$

c) Combinaison :

• Définition :

Soit E un ensemble à n éléments, et P un ensemble fini tel que : $(n \geq P)$. On appelle combinaison de P éléments de E , tout sous ensemble de E ayant P éléments.
On le note : C_n^P et on lit : « C, n, P ».

$$C_n^P = \frac{n(n-1)(n-2) \dots (n-p+1)}{n(n-1) \dots 2 \times 1} \quad \text{ou} \quad C_n^P = \frac{A_n^P}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

- Propriétés :

$$P_1: C_n^0 = 1 \quad ; \quad P_2: C_n^1 = n \quad ; \quad P_3: C_n^n = 1 \quad ; \quad P_4: C_n^{n-1} = n$$

N.B : Pour Calculer le C_n^P , on utilise le triangle de Pascal qui est le suivant :

$\begin{smallmatrix} p \\ n \end{smallmatrix}$	0	1	2	3	4	5	6
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
6	1	6	15	20	15	6	1

d) Nombre d'application d'un ensemble fini dans un autre ensemble fini (P- liste)

• **Définition :**

Soit **E** et **F** deux ensembles finis. On appelle nombre application de l'ensemble **E** dans **F**, toute relation qui permet d'associer à tout élément de **E**, un élément unique de **F**. Le nombre d'application distinct d'un ensemble fini de cardinal **p** dans un ensemble fini de **Cardinal n** est noté : A_n^p tel que : $A_n^p = n^p$

• **Propriétés:**

$$P_1 : A_n^0 = n^0 = 1 \quad ; \quad P_2 : A_n^1 = n^1 = n$$

4) Les différents types de tirages

a. Tirages successif et sans remise :

Si l'énoncé contient les mots **successif et sans remise**, cela signifie que l'ordre dans lequel on considère les éléments a de l'importance mais que tous les éléments considérés sont distincts (ou **qu'il n'y a pas de répétition d'éléments**).

Ainsi le modèle mathématique utilisé est : **l'arrangement** : A_n^p

b. Tirages successif et avec remise :

Si l'énoncé contient les mots **successif et avec remise**, cela signifie que l'ordre dans lequel on considère les éléments a de l'importance et qu'un élément peut éventuellement être répété.

Ainsi le modèle mathématique utilisé est : **la P-liste**: A_n^p

c. Tirage simultané :

Si l'énoncé contient le mot **simultanément**, cela signifie que l'ordre dans lequel on considère les éléments n'a pas d'importance.

Ainsi le modèle mathématique utilisé est : **la combinaison** : C_n^p

d. Tirage successif :

Si l'énoncé contient le mot **successif**, il faut en tenir compte de tous les ordres dans lesquels on peut obtenir un événement donné.

On doit souvent multiplier par le nombre d'ordres possibles le résultat trouvé pour un ordre déterminé.

Attention : les affirmations ci-dessus ne sont que des indications, elles admettent donc des exceptions.

NB : En probabilité :

- Le nombre total d'élément qui constitue l'univers est noté : **n**.
- Le nombre de tirage parmi ces **n** éléments est noté : **p**.
- La conjonction de coordination << **et** >> se traduit par la multiplication << x >>.
- La conjonction de coordination << **ou** >> se traduit par l'addition << + >>.

II- Probabilité simple :

1) Définition :

Dans une épreuve où tous les évènements élémentaires d'un univers Ω sont équiprobables, la probabilité d'un évènement A est le nombre réel défini par le rapport entre le Nombre de Cas Favorable à l'évènement A et le Nombre de Cas Possibles. On note P_A ou $P(A)$.

$$P(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{\text{Nombre de Cas Favorables à la réalisation de } A}{\text{Nombre Total de Cas Possibles à la réalisation de } A}$$

2) Propriétés :

Soit Ω l'univers ou évènement certain. Soient A et B deux évènements élémentaires de Ω .

On a les propriétés suivantes :

- $P(\Omega) = 1$
- $P(\emptyset) = 0$
- Si $A \cap B \neq \emptyset$ alors $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- Si $A \cap B = \emptyset$ alors $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
- $P(A) + P(\bar{A}) = 1$

3) Equiprobabilité:

On parle d'équiprobabilité si la probabilité de réalisation de chaque évènement élémentaire est le même.

Exemple : Le lancer du dé est un évènement équiprobable car la probabilité d'apparition de chaque face est $\frac{1}{6}$

III- Probabilités conditionnelles et Indépendance

1) Définition :

Soient A et B deux évènements de probabilité non nulles tels que $A \cap B \neq \emptyset$.

La probabilité de réalisation de A quand B est réalisé s'appelle probabilité conditionnelle de A par rapport à B ou probabilité de A sachant B . $P(A/B) = P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$.

2) Indépendance :

Deux évènements A et B sont indépendants si la réalisation de l'un ne modifie pas la réalisation de l'autre.

On a alors :

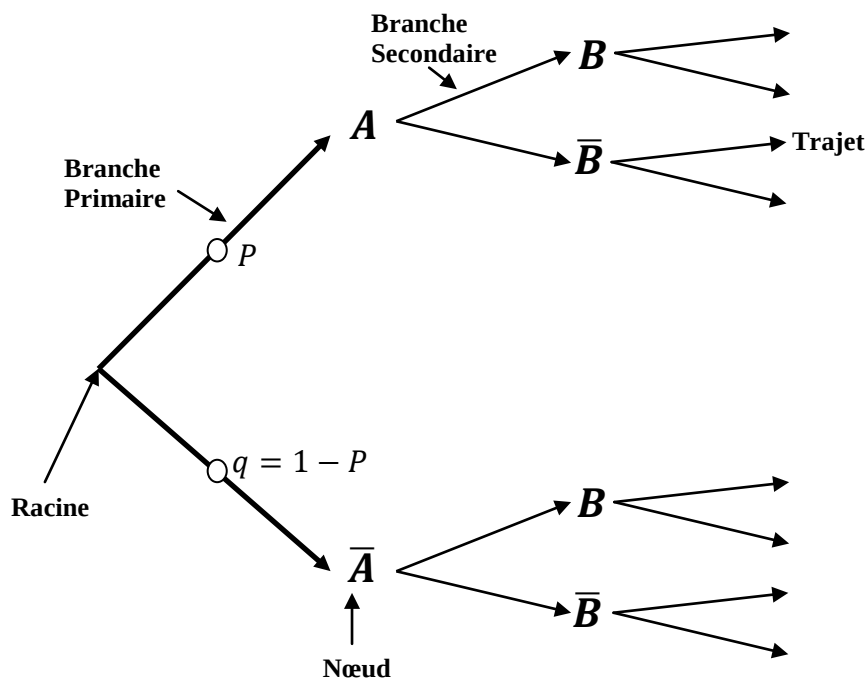
- $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.
- $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$
- $P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B})$

3) Construction d'un arbre pondéré:

Méthode :

Pour construire un arbre pondéré, on applique les règles suivantes :

- Les évènements qui se trouvent aux extrémités des branches primaires forment une partition de l'univers Ω .
- Le poids d'une branche primaire est la probabilité de l'évènement qui se trouve à son extrémité.
- La somme des poids des branches primaires vaut 1.
- Le poids d'une branche secondaire est la probabilité conditionnelle de l'évènement qui se trouve à son extrémité sachant que le trajet menant à son origine a été réalisé.
- La somme des poids des branches secondaire issues d'un même nœud vaut 1.
- Le poids ou la probabilité d'un trajet est le produit des branches le constituant.
- La probabilité d'un évènement associé à plusieurs trajets complets est la somme des probabilités de ces trajets.



IV- Loi de probabilité

1) Variable aléatoire :

On appelle variable aléatoire réelle, toute application x de Ω dans $\mathbb{R}$, l'ensemble des valeurs prises par x , noté $x(\Omega)$ et s'appelle l'univers image de Ω par x .

2) Loi de probabilité d'une variable aléatoire X

On appelle loi de probabilité d'une variable aléatoire X , la fonction : $P : x \mapsto P(X = x)$ qui à toute valeur image on associe la probabilité $P_i = P(X = x_i)$.

N.B : Une loi de probabilité se présente sous forme d'un tableau de valeurs

x_i	x_1	x_2	x_3		x_n
$p_i(X = x_i)$	p_1	p_2	p_3		p_n

Remarque : La somme de toutes les lois de probabilités est toujours égale à **1** c'est-à-dire :

$$p_1 + p_2 + p_3 + \dots + p_n = 1$$

3) Valeurs caractéristiques d'une variable aléatoire :

a) Espérance mathématique E(X) ou $\bar{X}$

On appelle espérance mathématique $\bar{X}$, le nombre noté : $\bar{X} = E(X)$ tel que :

$$\bar{X} = \sum_{i=1}^n x_i p_i = x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3 + \dots + x_n p_n$$

NB : C'est la moyenne pondérée des valeurs images x_i pondérées par les probabilités P_i **Car** :

$$p_1 + p_2 + p_3 + \dots + p_n = 1$$

Propriétés :

$$P_1 : E(x - E(x)) = 0 \quad ; \quad P_3 : E(x + k) = E(x) + k$$

$$P_2 : E(k) = k \quad P_4 : E(kx) = k E(x).$$

b) Variance :

On appelle variance d'une variable aléatoire X , le nombre réel noté $V(X)$ telle que :

$$V(X) = \sum_{i=1}^n x_i^2 p_i - [E]^2 = x_1^2 p_1 + x_2^2 p_2 + x_3^2 p_3 + \dots + x_n^2 p_n - [E]^2$$

Propriétés :

$$P_1 : V(k) = 0 \quad ; \quad P_2 : V(X+k) = V(x) \quad ; \quad P_3 : V(kx) = k^2 V(x)$$

c) Ecart – type :

On appelle écart-type, la racine carré de la variance. On la note δ tel que : $\delta = \sqrt{V}$.

Propriété:

$$\delta(kx) = k \delta(x)$$

4) Partie associée à une valeur image :

Etant donnée une valeur image x_i ; on désigne par " $X = x_i$ ", l'évènement constitué par l'ensemble des éventualités e_k de Ω ayant pour image x_i par X . On note " $X(e_k) = x_i$ " ou " $X = x_i$ ".

N.B : L'ensemble des évènements " $X = x_i$ ", constitue une partition de Ω et forme un système complet d'évènements.

On définit également les notations : $X > a$; $X \geq a$; qui désigne l'ensemble des éventualités de Ω dont l'image est strictement supérieure à a , supérieure ou égale à a , ...

5) Fonction de répartition d'une variable aléatoire X

On appelle fonction de répartition de la variable aléatoire x , la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par :

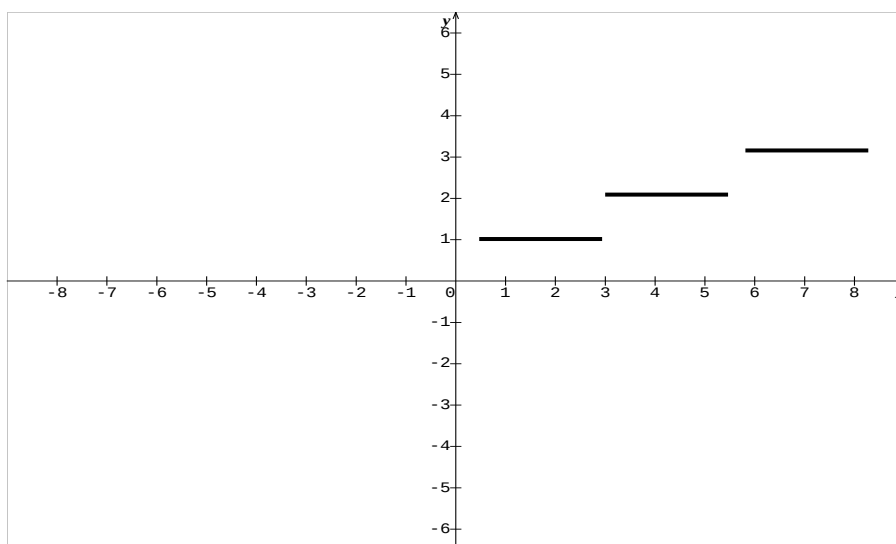
$$F : x \mapsto p(X \leq x)$$

N.B :

Si $x_i \leq x \leq x_{i+1}$, alors $F(x) = P_1 + P_2 + \dots + P_i$

En particulier : $F(x) = 0$ pour $x < x_1$ et $F(x) = 1$ pour $x > x_n$

La fonction F est une fonction en escalier, croissante de 0 à 1



6) Epreuve de Bernoulli – Loi Binomiale

a- Epreuve de Bernoulli

On appelle épreuve de Bernoulli, toute épreuve ne conduisant qu'à deux éventualités : L'une de ces deux éventualités est appelée **succès** avec pour probabilité p et l'autre **échec** avec pour probabilité $q = 1 - p$.

b- Loi binomiale :

Soit une suite de n épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes.

Soit p la probabilité du succès et $q = 1 - p$ celle de l'échec.

Soit X la variable aléatoire désignant le nombre de succès.

La probabilité d'avoir exactement k succès est : $p(X = k) = C_n^k p^k q^{n-k}$

Exercices

Vocabulaire de la théorie des ensembles

1 Soient A et B deux ensembles finis tels que : $A = \{1 ; a ; c\}$ et $B = \{b ; 1 ; c ; 2\}$

1) Détermine : $A \cap B$; $A \cup B$; $A \times B$.

2) Détermine : $Card(A)$; $Card(B)$; $Card(A \cap B)$; $Card(A \cup B)$; $Card(A \times B)$.

2 Soit E un ensemble non vide et $A ; B ; C ; D$ des parties non vides de E .

1) Montre que $A - B = A \cap \bar{B}$, où $\bar{B} = C_E^B$.

2) En utilisant la question 1), Montre que :

a- $(A \cup B) - C = (A - C) \cup (B - C)$.

b- $A - (B \cup C) = (A - B) - C$.

c- $A - (B - C) = (A - B) \cup (A \cap C)$.

d- $A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C)$.

e- $(A - B) \cap (C - D) = (A \cap C) - (B \cup D)$

Dénombrements.

3 1) Calcule :

$$A = 5! + 3(4!) ; B = \frac{8!}{3!} ; C = \frac{12!}{10!3!} ; D = \frac{(n+1)!}{(n-1)!} ; E = \frac{n \times n!}{(n-1)!} ; F = \frac{(2n+1)!}{(2n)!}$$

$$G = A_8^5 + A_{13}^2 + 3A_{100}^0 ; H = C_7^4 + C_{15}^{15} + 8C_{100}^{99} ; I = \frac{A_{13}^8}{A_6^4} + \frac{C_{10}^5}{C_9^5}$$

2) Résous dans $\mathbb{N}$ les équations suivantes :

$$a) A_n^2 = n(2n + 5) ; b) C_n^2 = 5n ; c) A_n^2 = C_n^3 ; d) C_n^2 = 45 ; e) n^2 + 3C_n^2 = 1$$