

Dénombrement :

Définitions	✓ Le cardinal de E est le nombre des éléments de E et on le note : $Card(E)$ ✓ Le complémentaire de A dans E est noté $\bar{A}$ $\bar{A} = \{x \in E / x \notin A\}$
Propriétés	✓ $Card(A \cup B) = Card(A) + Card(B) - Card(A \cap B)$ ✓ Si $A \cap B = \emptyset$ alors : $Card(A \cup B) = Card(A) + Card(B)$ ✓ $Card(\bar{A}) = Card(E) - Card(A)$ $A \cup \bar{A} = E$ $A \cap \bar{A} = \emptyset$

Le principe fondamental du dénombrement

Dans une situation de dénombrement contient p choix

Si le 1^{er} choix se réalise par n_1 façon distinctes

et le 2^{ème} choix se réalise par n_2 façon distinctes

.....

et le $p^{ème}$ choix se réalise par n_p façon distinctes

Alors le nombre des possibilités est $n_1 \times n_2 \times \dots \times n_p$

Arrangements	✓ Le nombre des arrangements sans répétition de p éléments pris parmi n éléments est : $A_n^p = n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times (n-p+1)$ p facteurs $(p \text{ et } n \text{ deux éléments de } \mathbb{N}^* \text{ et } p \leq n)$ ✓ Le nombre des arrangements avec répétition de p élément pris parmi n élément est : n^p $(p \text{ et } n \text{ deux éléments de } \mathbb{N}^*)$
Permutations	✓ Tout arrangement de n éléments pris parmi n éléments est appelé une permutation de n éléments, le nombre des permutations est $A_n^n = n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times 1$
Combinaisons	Soit E un ensemble de cardinal n $(p \text{ et } n \text{ deux éléments de } \mathbb{N}^* \text{ et } p \leq n)$ Toute partie de E contenant p éléments est appelée combinaison de p éléments pris parmi n éléments de E ✓ Le nombre des combinaisons de p élément pris parmi n est : $C_n^p = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$

Quelques types de tirage :

On tire p éléments parmi n éléments $(p \text{ et } n \text{ deux éléments de } \mathbb{N}^*)$

type de tirage	nombre des possibilités	L'ordre
simultanément $(p \leq n)$	C_n^p	N'est pas important
Successivement et sans remise $(p \leq n)$	A_n^p	important
Successivement et avec remise	n^p	important

Nombre de possibilités d'arrangement de n éléments

On dispose de n_1 éléments de type A, et de n_2 éléments de type B, de n_3 éléments de type C, parmi n éléments, avec $n = n_1 + n_2 + n_3$

➤ le nombre de possibilités d'arranger ces n éléments est : $\frac{n!}{n_1!n_2!n_3!}$

Probabilités

Vocabulaires
et
définitions

- **Expérience aléatoire** : Toute expérience dont on ne connaît pas ses résultats d'avance
- **Possibilité** : tout résultat d'une expérience aléatoire
- **Univers des possibilités** : l'ensemble de toutes les éventualités, noté Ω
- **L'événement** : toute partie de Ω
- **L'événement contraire** : est l'événement noté $\bar{A}$ et qui vérifie : $A \cup \bar{A} = E$ et $A \cap \bar{A} = \emptyset$
- **L'événement $A \cap B$** : se réalise lorsque **A et B sont réalisés en même temps**
- **L'événement $A \cup B$** : se réalise lorsque l'un au moins des éventualités **A ou B** est réalisé.
- **A et B sont incompatibles (ou disjoints)** : si $A \cap B = \emptyset$

Propriétés	$P(\Omega) = 1$ et $P(\emptyset) = 0$ et $0 \leq P(A) \leq 1$ et $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$
La probabilité d'un événement	• Equiprobabilité : $P(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)}$
La probabilité conditionnelle	• La probabilité de B sachant que A est réalisé $P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$ ($P(A) \neq 0$)
L'indépendance	• A et B sont indépendants ssi: $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$
Répétition d'expériences identiques et indépendantes	Soit A un événement de probabilité p dans une expérience aléatoire on répète cette expérience n fois. La probabilité de réalisation de A, exactement k fois est : $C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$

Variables aléatoires

loi de probabilité d'une variable aléatoire	une variable aléatoire est toute application X de Ω vers $\mathbb{R}$												
	• <u>L'ensemble des valeurs prise par X</u> est noté : $X(\Omega) = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}$ • <u>La détermination de la loi de probabilité de X</u> : signifie le calcul des probabilités des événements $(X = x_i)$ avec $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ On résume la loi de probabilité de X dans le tableau : <table border="1"> <tr> <td>x_i</td> <td>x_1</td> <td>x_2</td> <td>x_3</td> <td>...</td> <td>x_n</td> </tr> <tr> <td>$p(X = x_i)$</td> <td>p_1</td> <td>p_2</td> <td>p_3</td> <td>...</td> <td>p_n</td> </tr> </table>	x_i	x_1	x_2	x_3	...	x_n	$p(X = x_i)$	p_1	p_2	p_3	...	p_n
	x_i	x_1	x_2	x_3	...	x_n							
	$p(X = x_i)$	p_1	p_2	p_3	...	p_n							
✓ Remarque : $p_1 + p_2 + p_3 + \dots + p_n = 1$													
▪ L'espérance mathématique : $E(X) = x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + x_3 \cdot p_3 + \dots + x_n \cdot p_n$ ▪ La variance : $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = x_1^2 \cdot p_1 + x_2^2 \cdot p_2 + x_3^2 \cdot p_3 + \dots + x_n^2 \cdot p_n - (E(X))^2$ ▪ L'écart-type : $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$													
La loi binomiale	Soit A un événement de probabilité p dans une expérience aléatoire on répète cette expérience n fois. La variable aléatoire X qui est égale au nombre de fois de réalisation de A s'appelle variable aléatoire binomiale de paramètres n et p on a : $X(\Omega) = \{0, 1, 2, \dots, n\}$ $\forall k \in \{1, 2, \dots, n\}$ $p(X = k) = C_n^k p^k (1 - p)^{n-k}$ $E(X) = np$ et $V(X) = np(1 - p)$												