

Suites Numériques

I- Généralité :

1) Définition :

On appelle suite numérique toute fonction définie de $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$. On note

$$U : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$n \rightarrow U(n) = u_n$$

Exemple :

Soit une suite u_n définie par : $u_n = \frac{2n+1}{n+2}$. Calculer : $u_0 ; u_1 ; u_2 ; u_3 ; u_4$

$$u_0 = \frac{1}{2} ; u_1 = 1 ; u_2 = \frac{5}{4} ; u_3 = \frac{7}{5} ; u_4 = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$$

2) Mode de définition d'une suite :

- Une suite peut être définie par 1 formule explicite c'est-à-dire : u_n en fonction de n
 $u_n = f(n)$.

Exemple : $u_n = n + 3 ; v_n = \frac{2n-4}{n+1} ; w_n = 4n^2 - 3n + 1$

- Une suite peut être définie par son 1^{er} terme et une formule de récurrence, c'est-à-dire u_{n+1} s'exprime en fonction de u_n .

Exemple : soit la suite : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{3}{2}u_n + 4 \end{cases}$. Calculer : $u_1 ; u_2 ; u_3 ; u_4$

Solution :

$$\text{Pour } n = 0, u_1 = \frac{3}{2}u_0 + 4 = \frac{3}{2}(2) + 4 = 7$$

$$\text{Pour } n = 1, u_2 = \frac{3}{2}u_1 + 4 = \frac{29}{2}$$

$$\text{Pour } n = 2, u_3 = \frac{3}{2}u_2 + 4 = \frac{103}{4}$$

$$\text{Pour } n = 3, u_4 = \frac{3}{2}u_3 + 4 = \frac{341}{8}$$

u_0 est le 1^{er} terme de la suite et u_n est le terme général.

3) Sens de variation d'une suite

- Si $u_{n+1} - u_n \geq 0$; $\forall n \in \mathbb{N}$ alors u_n est croissante
- Si $u_{n+1} - u_n \leq 0$; $\forall n \in \mathbb{N}$ alors u_n est décroissante
- Si $u_{n+1} - u_n = 0$; $\forall n \in \mathbb{N}$ alors u_n est constante

Exemple :

Etudier le sens de variation de chacune des suites :

$$u_n = \frac{2n+3}{n+2} \quad ; \quad v_n = -\frac{3}{2}n + 4$$

Solution :

$$u_n = \frac{2n+3}{n+2} \Rightarrow u_{n+1} = \frac{2(n+1)+3}{(n+1)+2} = \frac{2n+5}{n+3}$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2n+5}{n+3} - \frac{2n+3}{n+2} = \frac{1}{(n+3)(n+2)} > 0$$

D'où u_n est croissante

$$v_n = -\frac{3}{2}n + 4 \Rightarrow v_{n+1} = -\frac{3}{2}(n+1) + 4 = -\frac{3}{2}n + \frac{5}{2}$$

$$v_{n+1} - v_n = \left(-\frac{3}{2}n + \frac{5}{2}\right) - \left(-\frac{3}{2}n + 4\right) = -\frac{3}{2} < 0$$

$$v_{n+1} - v_n = -\frac{3}{2} < 0 \quad \text{D'où } v_n \text{ est décroissante}$$

4) Représentation des termes d'une suite :

Pour représenter les termes d'une suite u_n sur l'axe de abscisses, on trace la 1^{ère} bissectrice (D) d'équation $y = x$. Puis on trace la fonction associée à la suite u_n en posant $u_n = x$ et $u_{n+1} = f(x)$. On détermine les termes de la suite sur l'axe des abscisses par projection.

Exemple

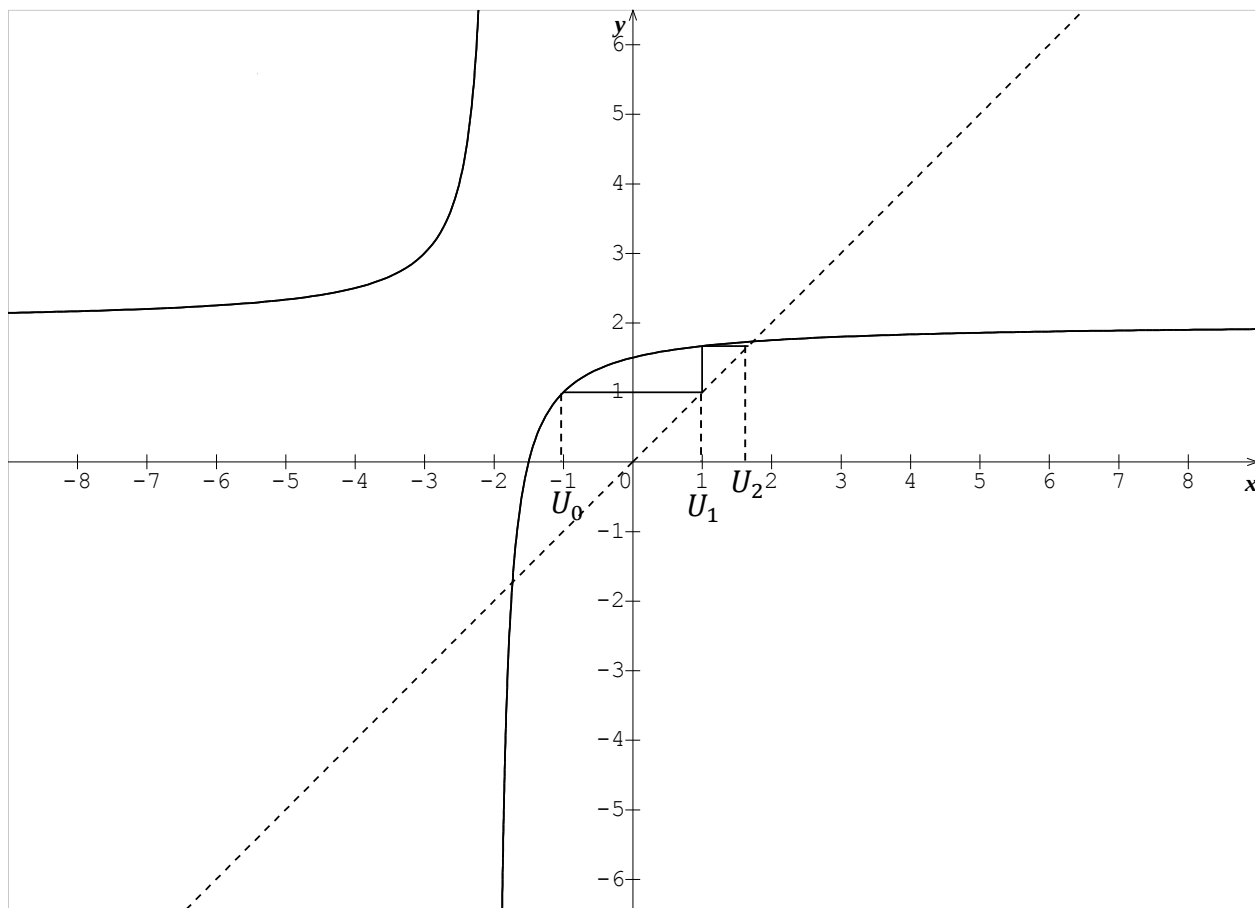
$$\text{Soit } (u_n) \text{ définie Par : } \begin{cases} U_0 = -1 \\ U_{n+1} = \frac{3+2U_n}{2+U_n} \end{cases}$$

Représenter sur l'axe (ox) les 3 premiers termes de la suite u_n .

Solution

Désignons par f la fonction définie sur $] -2 ; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{3+2x}{2+x}$

En suivant les règles de constructions ci-dessous , on a la représentation suivante :



II- Convergence d'une suite

1) Activités :

Activité1 :

Soit la suite $u_n = \frac{1}{n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$

- 1) Calculer $u_1 ; u_2 ; u_{1000} ; u_{1000000000}$.
- 2) En déduire le sens de variation de u_n
- 3) Que peut – on conclure ?

Solution :

- 1) Calculons : $u_1 ; u_2 ; u_{1000} ; u_{1000000000}$.

Pour $n = 1$ alors $u_1 = 1$

Pour $n = 2$ alors $u_2 = \frac{1}{2}$

Pour $n = 1000$ alors $u_{1000} = \frac{1}{1000} = 0,001$

Pour $n = 1000000000$ alors $u_{1000000000} = \frac{1}{1000000000} = 0,00000001$

En déduisons le sens de variation de u_n

Puis que : $u_1 > u_2 > u_{1000} > u_{1000000000}$ alors u_n est une suite décroissante.

- 2) Conclusion : on remarque que lors que n tend vers $+\infty$ alors u_n tend vers 0.

On note : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$

On dit alors que la valeur limite de la suite u_n est 0, quand n tend vers $+\infty$.

Activité 2 :

Soit $v_n = n + 2$. Calculer $v_1 ; v_2 ; v_{1000} ; v_{1000000000}$. Puis conclure.

Solution :

- 1) Calculons : $v_1 ; v_2 ; v_{1000} ; v_{1000000000}$

Pour $n = 1$ alors $v_1 = 3$

Pour $n = 2$ alors $v_2 = 4$

Pour $n = 1000$ alors $v_{1000} = 1002$

Pour $n = 1000000000$ alors $v_{1000000000} = 1000000002$

2) Définition :

Une suite u_n est dite convergente si et seulement si son terme général u_n a une limite finie l .
on note :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l \text{ avec } l \in \mathbb{R}$$

Remarque :

$$\text{Si } \lim_{n \rightarrow -\infty} u_n = +\infty \quad \text{ou} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$$

Alors u_n est dite divergente.

Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$ alors la suite u_n converge vers l .

Evaluation :

Etudier la convergence de chacune des suites suivantes :

$$u_n = \frac{n+2}{n+3} ; v_n = \frac{2-3n}{n+4} ; w_n = 2^{-n}$$

III- Suite majorée – minorée – bornée :

1) Définitions :

- Une suite u_n est majorée si et seulement $\forall a \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N} : u_n \leq a$.
- Une suite u_n est minorée si et seulement $\forall a \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N} : u_n \geq a$.
- Une suite u_n est bornée si et seulement $\forall a \in \mathbb{R} ; b \in \mathbb{R}$ et que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a :
 $b \leq u_n \leq a$

2) Théorèmes :

a) Théorème 1 :

- Toute suite croissante et majorée est convergente.
- Toute suite décroissante et minorée est convergente.

Exemple :

Soit la suite u_n définie par $\forall n \in \mathbb{N}^* u_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots \dots \dots \frac{1}{2n}$

Montrer que la suite $u_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots \dots \dots \frac{1}{2n}$ est décroissante et minorée.

En déduire qu'elle est convergente.

Solution :

On remarque tous les termes de la suite u_n sont positifs.

Donc cette suite est minorée par 0. Etudions maintenant sa décroissance.

$$u_{n+1} - u_n = -\frac{(3n+2)}{n(2n+1)(2n+2)} < 0 \text{ . Donc la suite } u_n \text{ est décroissante.}$$

Dédution : u_n étant à la fois positive et décroissante, alors elle est convergente.

b) Théorème 2 :

Tout sous-ensemble non vide E de nombres réels a une borne supérieure A : c'est-à-dire $\forall x \in E ; x \leq A$

3) Propriétés :

Soient u_n et v_n deux suites tel que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = l'$$

On a les propriétés suivantes :

P₁ : Si $u_n \leq v_n$: alors $l \leq l'$

P₂ : $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n + v_n) = l + l'$

P₃ : Si (u_n) est bornée et si (v_n) est divergente, alors :

$$\text{a) } \lim_{n \rightarrow \infty} (u_n + v_n) = +\infty \quad \text{b) } \lim_{n \rightarrow \infty} (u_n \times v_n) = \infty$$

IV- Relations entre les limites :

Théorème : (Théorème des gendarmes).

Considérons les trois suites u_n ; v_n et w_n ($n > n_0$)

Tel que : $u_n \leq v_n \leq w_n$

u_n et w_n Si converge vers la même limite l ; alors v_n converge vers l .

Preuve :

A partir de la relation donnée entre les suites on a :

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} u_n &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} v_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} w_n \\ \Leftrightarrow l &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} v_n \leq l \end{aligned}$$

$$\text{Alors } \lim_{n \rightarrow \infty} v_n = l$$

V- Suites Adjacentes :

Définition :

Une suite (u_n) est adjacente à une autre suite (v_n) si l'une des deux suites est décroissante tandis que l'autre est croissante et si

$$\text{Alors } \lim_{n \rightarrow \infty} (u_n - v_n) = 0$$

Théorème 1 :

Si les suites u_n et v_n sont adjacentes (u_n croissante et v_n décroissante) alors :

$$\forall n \in \mathbb{N} \text{ on a : } u_n \leq v_n.$$

Preuve :

Supposons que le contraire de la conclusion du théorème soit vrai pour $n = k$, c'est-à-dire : $u_k \geq v_k$.

Pour $n > k$, puisque u_n est décroissante et que v_n est décroissante, on a :

$$u_n \geq u_k \geq v_k \geq v_n$$

$$\Rightarrow (u_n - v_n) \geq (u_k - v_k)$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (u_n - v_n) \neq 0$$

Théorème 2 : si deux suites sont adjacentes, alors elles convergent à une même limite.

Preuve :

Puis que les suites sont adjacentes et que u_n est croissante et v_n décroissante, le **théorème 1** implique : $u_0 \leq u_n \leq v_n \leq v_0$

On note alors que :

a) u_n est croissante et elle est majorée par v_0 , donc elle converge vers l .

b) v_n est décroissante et elle est minorée par u_0 donc elle converge vers l' .

Ainsi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n - v_n) = l - l'$$

$$\Rightarrow 0 = l - l' \Leftrightarrow l = l'$$

Ce qu'il fallait prouver.

Exemple :

Considérons les deux suites suivantes : $U_{n+1} = \sqrt{U_n \bullet V_n}$ (moyenne géométrique)

Et ($0 \leq U_0 \leq V_0$)

$V_{n+1} = \frac{U_n + V_n}{2}$ (moyenne arithmétique)

1) Calculer $V_n^2 - U_n^2$ puis en déduire qu'il est non négatif, donc que $V_{n+1} \geq U_{n+1}$
(Pour tout $n \in \mathbb{N}$).

2) Utiliser les résultats de la question 1) pour montrer que $U_{n+1} > U_n$ et $V_{n+1} < V_n$.

C'est-à-dire que u_n est croissante et que v_n est décroissante.

3) Montrer que les suites u_n et v_n sont adjacentes.

Solution :

$$\begin{aligned} 1) V_{n+1}^2 - U_{n+1}^2 &= \frac{(U_n + V_n)^2}{4} - (\sqrt{U_n \bullet V_n})^2 \\ &= \frac{U_n^2 + 2U_n \bullet V_n + V_n^2}{4} - U_n \bullet V_n \\ &= \frac{U_n^2 + 2U_n \bullet V_n + V_n^2 - 4U_n \bullet V_n}{4} \\ V_{n+1}^2 - U_{n+1}^2 &= \frac{(U_n - V_n)^2}{4} \end{aligned}$$

Puis que $\frac{(U_n - V_n)^2}{4} > 0$ alors $V_{n+1}^2 - U_{n+1}^2$ est non négatif.

$$u_{n+1} = \sqrt{U_n \bullet V_n} \geq \sqrt{U_n \bullet U_n} \text{ puis que } u_n \leq v_n \Rightarrow v_{n+1} \geq u_n$$

$$V_{n+1} = \frac{U_n + V_n}{2} \leq \frac{U_n + V_n}{2} \text{ puis que } U_n \leq V_n \Rightarrow u_{n+1} \leq v_n.$$

3) A partir de la définition des suites, nous avons :

$$\begin{aligned} v_{n+1} - u_{n+1} &= \frac{U_n + V_n}{2} - \sqrt{U_n \bullet V_n} \leq \frac{U_n + V_n}{2} - \sqrt{U_n \bullet V_n} \\ \Leftrightarrow v_{n+1} - u_{n+1} &\leq \frac{U_n + V_n}{2} - U_n \\ \Leftrightarrow v_{n+1} - u_{n+1} &\leq \frac{1}{2}(V_n - U_n) \end{aligned}$$

Cette dernière relation étant valable pour tout $n \in \mathbb{N}$, on obtient par récurrence.

$$v_{n+1} - u_{n+1} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n (v_0 - u_0) \text{ ce qui donne à la limite}$$

$$0 \leq \lim (v_{n+1} - u_{n+1}) \leq \lim \left(\frac{1}{2^n}\right) (v_0 - u_0) = 0$$

$$n \rightarrow \infty$$

$$n \rightarrow \infty$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (V_n - U_n) = 0$$

Donc les deux suites sont adjacentes.

VI- Suites Arithmétiques

1) Activité :

Au 1^{er} Janvier 2012, le prix d'un kilo de sucre est de 550 f CFA.

Sachant que le prix du kilo subit une augmentation de 50 f CFA au 1^{er} Janvier de chaque année, quel serait le prix du kilo de sucre au 1^{er} Janvier 2013 ? Au 1^{er} Janvier 2014 ?

On désigne par p_n le prix du kilo du sucre au 1^{er} Janvier + n .

Calculer P_1 ; P_2 ; P_3 et p_n .

Calculer $p_{n+1} - p_n$.

Solution

Soit P_0 le prix d'un kilo de sucre au 1^{er} Janvier 2012 tel que $P_0 = 550$.

Calculons le prix d'un kilo de sucre :

- **Au 1^{er} Janvier 2013** , le prix d'un kilo de sucre serait $P_1 = P_0 + 50 = 550 + 50 = 600$.
- **Au 1^{er} Janvier 2014** , le prix d'un kilo de sucre serait $P_2 = P_1 + 50 = 600 + 50 = 650$.

Soit P_n le prix d'un kilo de sucre au 1^{er} Janvier + n .

Calculons : P_1 ; P_2 ; P_3 et p_n .

- $P_0 = 550$.
- $P_1 = P_0 + 50 = 550 + 50 = 600$.
- $P_2 = P_1 + 50 = 600 + 50 = 650$.
- $P_3 = P_2 + 50 = 650 + 50 = 700$.
- $p_n = P_0 + 50n = 550 + 50n$.

Calculons $p_{n+1} - p_n$.

$$p_n = 550 + 50n \Rightarrow p_{n+1} = 550 + 50(n + 1) = 550 + 50 + 50n = 600 + 50n$$

$$\Rightarrow p_{n+1} - p_n = (600 + 50n) - (550 + 50n) = 600 + 50n - 550 - 50n = 50$$

Alors on a : une suite arithmétique de raison $r = 50$.

2) Définition :

Une suite u_n est dite arithmétique si et seulement si : $\forall n \in \mathbb{N} ; u_{n+1} - u_n = r$.

r est appelé la raison de la suite u_n .

Exemple :

Soit une suite u_n définie par : $u_n = \frac{2}{3}n + 4$.

Démontrer que u_n est une suite arithmétique dont on précisera la raison et le 1^{er} terme U_0 .

Solution :

$$u_n = \frac{2}{3}n + 4$$

$$U_{n+1} = \frac{2}{3}(n+1) + 4 = \frac{2}{3}n + \frac{14}{3} \Rightarrow$$

$$U_{n+1} - U_n = \frac{2}{3} \text{ d'où } U_n \text{ est une suite arithmétique de raison } r = \frac{2}{3} \text{ et de 1}^{\text{er}} \text{ terme } u_0 = 4$$

3) Expression du terme général :

Soit U_n une suite de 1^{er} de terme U_0 et de raison r .

$$U_1 - U_0 = r$$

$$U_2 - U_1 = r$$

$$U_3 - U_2 = r$$

$\vdots$

$$U_n - U_{n-1} = r$$

$$U_n - U_0 = nr$$

$$\Rightarrow u_n = u_0 + nr$$

D'une façon générale si u_p est le 1er terme l'expression du terme général est :

$$u_n = u_p + (n - p)r$$

Exemple :

Soit la suite réel définie par $\begin{cases} U_0 = -1 \\ \forall n \in \mathbb{N}; U_{n+1} = U_n - 3 \end{cases}$

a) Démontrer que u_n est une suite arithmétique dont on précisera la raison et le 1^{er} terme.

b) Exprimer u_n en fonction de n .

Solution :

a) $u_{n+1} = u_n - 3 \Rightarrow u_{n+1} - u_n = -3$

D'où U_n est une suite arithmétique de raison $r = -3$ et de 1^{er} terme $u_0 = -1$.

b) $U_n = U_0 + nr = -1 + n(-3) \Rightarrow u_n = -3n - 1$

4) Termes équidistants d'une suite :

Soit (u_n) $n \in \mathbb{N}$ une suite arithmétique p un entier naturel tel que $p \leq n$ les termes u_p et u_{n-p} sont des termes équidistants des termes extrêmes u_0 et u_n car il ya p termes avant le terme u_p et p termes après le terme u_{n-p} on a :

5) Somme des termes équidistants d'une suite arithmétique

Soit p un entier naturel tel que $p \leq n$

Les termes u_p et u_{n-p} sont des termes équidistants des termes extrêmes

$$u_p + u_{n-p} = (u_0 + pr) + (u_0 + (n - p)r) = u_0 + (u_0 + nr) \text{ d'où}$$

$$u_p + u_{n-p} = u_0 + u_n \text{ d'où le théorème}$$

Théorème : la somme de deux termes équidistants d'une suite arithmétique est égale à la somme des termes extrêmes

6) Propriétés :

En application du théorème on a :

P₁ : Trois nombres **a, b, c** forment une progression arithmétique si :

$$2b = a + c.$$

Preuve :

Soit a, b et c trois réels

$$b = a + r$$

$$c = b + r$$

$$a + c = a + b + r = 2a + 2r = 2(a + r). \text{ Alors : } a + c = 2b$$

P₂ : Trois nombres **a, b, c** forment une progression arithmétique de raison r si :

$$b = a + r \text{ et } c = a + 2r.$$

P₃ : Quatre nombres **a, b, c, d** forment une progression arithmétique de raison r si :

$$3b - d = 2d$$

P₄ : Soit u_n une suite arithmétique de 1^{er} terme u_0 . La somme de deux termes équidistants est toujours à la somme des extrêmes

$$u_0, u_1, u_2, \dots, u_{n-2}, u_{n-1}, u_n$$

$u_1; u_{n-1}$ sont équidistants

$$u_0 + u_n = u_p + u_{n-p}$$

Exemple

Trouver 3 nombres consécutifs $a; b$ et c d'une suite en progression arithmétique sachant que

$$\begin{cases} a + b + c = 3 \\ 3a - 6b + c = 6 \end{cases}$$

Solution :

Trouvons 3 nombres consécutifs $a; b$ et c d'une suite en progression arithmétique sachant

$$\text{que } \begin{cases} a + b + c = 3 \\ 3a - 6b + c = 6 \end{cases}$$

On sait que pour une progression arithmétique de 3 termes $a; b; c$, on a : $a + c = 2b$

Ainsi l'équation dévient :

$$\begin{cases} 2b + b = 3 \\ 3a - 6b + c = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3b = 3 \\ 3a - 6b + c = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 1 \\ 3a - 6b + c = 6 \end{cases}$$

$$\text{D'autre part } a + b + c = 3 \Rightarrow a + 1 + c = 3 \Rightarrow a + c = 2$$

$$\begin{cases} a + c = 2 \\ 3a - 6 + c = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + c = 2 \\ 3a + c = 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -a - c = -2 \\ 3a + c = 12 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2a = 10 \Rightarrow a = 5 \text{ et } c = -3$$

D'où les nombres a ; b et c sont tels que $a = 5$; $b = 1$ et $c = -3$

7) Sens de variation d'une suite arithmétique

Soit u_n une suite arithmétique de raison r . On a :

$u_{n+1} - u_n = r$ d'où :

- Si $r > 0$ alors u_n est croissante
- Si $r < 0$ alors u_n est décroissante
- Si $r = 0$ alors u_n est constante

8) Somme des termes d'une suite arithmétique :

Soit u_n une suite arithmétique de 1^{er} terme u_0 et de raison r .

$$S_n = U_0 + U_1 + U_2 + \dots + U_{n-2} + U_{n-1} + U_n$$

$$S_n = U_n + U_{n-1} + U_{n-2} + \dots + U_2 + U_1 + U_0$$

$$2S_n = (U_0 + U_n) + (U_1 + U_{n-1}) + (U_2 + U_{n-2}) + \dots + (U_n + U_0)$$

$$2S_n = (U_0 + U_n) + (U_0 + U_n) + (U_0 + U_n) + \dots + (U_0 + U_n)$$

$$\Rightarrow 2S_n = (n + 1) (U_0 + U_n)$$

$$\boxed{S_n = \frac{n+1}{2} (U_0 + U_n)} \Leftrightarrow S_n = \frac{\text{nombre de termes}}{2} (1^{\text{er}} \text{ terme} + \text{dernier terme})$$

$$\text{ou } \boxed{S_n = \frac{(n - P + 1)}{2} (U_P + U_n)}$$

Remarque : une suite arithmétique est toujours divergente

VII- Suites géométriques

Situation problème

Le premier Janvier 1999, la population d'une commune rurale était de 3000 habitants.

On admet que cette population diminue de 4 % chaque année.

Calcule la population de cette commune :

a) Au 1^{er} Janvier 2005 ;

- b) Au 1^{er} Janvier 2006
c) Au 1^{er} Janvier 2012

Solution

Soit U_n la population de cette commune au 1^{er} Janvier de l'année n .

Soit $U_1 = 3000$ la population initiale de cette commune.

On a :

$$U_1 = 3000 .$$

$$U_2 = U_1 - 4 \% U_1 \Rightarrow U_2 = U_1 (1 - 4 \%) = U_1 (1 - \frac{4}{100}) = U_1 (0,96)$$

$$U_3 = U_2 (0,96)$$

· ·

· ·

· ·

$$U_{n+1} = U_n (0,96)$$

$$\Rightarrow \frac{U_{n+1}}{U_n} = 0,96.$$

Alors on a : une suite géométrique de raison $q = 0,96$.

$$D'où son expression est : U_n = U_1 (q)^{n-1} = 3000 (0,96)^{n-1}$$

Déterminons ainsi la population :

- Au 1^{er} Janvier 2005

$$\text{On sait que : } U_n = 3000 (0,96)^{n-1} \text{ et } n = 2005 - 1999 = 6$$

$$D'où la population au 1^{er} Janvier 2005 est : $U_6 = 3000 (0,96)^{6-1} = 3000 (0,96)^5$$$

$$\Rightarrow U_6 = 2446,11 \approx 2446$$

Ainsi la population au 1^{er} Janvier 2005 est : 2244 habitants.

- Au 1^{er} Janvier 2006

$$\text{On sait que : } U_n = 3000 (0,96)^{n-1} \text{ et } n = 2006 - 1999 = 7$$

$$D'où la population au 1^{er} Janvier 2006 est : $U_7 = 3000 (0,96)^{7-1} = 3000 (0,96)^6$$$

$$\Rightarrow U_7 = 2348,27 \approx 2348$$

Ainsi la population au 1^{er} Janvier 2006 est : 2348 habitants.

- Au 1^{er} Janvier 2012

On sait que : $U_n = 3000(0,96)^{n-1}$ et $n = 2012 - 1999 = 13$

D'où la population au 1^{er} Janvier 2005 est : $U_{13} = 3000(0,96)^{13-1} = 3000(0,96)^{12}$

$$\Rightarrow U_{13} = 1838,12 \approx 1838$$

Ainsi la population au 1^{er} Janvier 20012 est : 1838 habitants.

1) Définition :

U_n est une suite géométrique si et seulement si : $\forall n \in \mathbb{N} \frac{U_{n+1}}{U_n} = q$ ou $U_{n+1} = qU_n$.

q est un réel fixé appelé la raison de la suite géométrique.

Exemple :

1, 2, 4, 8, 16, 32..... 2^n sont les termes d'une suite géométrique de raison $q = 2$ et de 1^{er} terme $U_0 = 1$

L'expression de terme général est $U_n = 2^n$

2) Expression du 1^{er} terme générale

Soit u_n une suite géométrique de raison q et de 1^{er} terme u_0

$$U_1 = qU_0$$

$$U_2 = qU_1$$

$$U_3 = qU_2$$

$$U_4 = qU_3$$

$$\vdots$$

$$U_n = qU_{n-1}$$

Multiplions membre à membre les termes de l'égalité.

$$U_1 \times U_2 \times U_3 \times U_4 \times \dots \times U_n = (qU_0)(qU_1)(qU_2) \dots (qU_{n-1})$$

$u_n = q^n \times U_0$ ou d'une manière générale $U_n = U_p \cdot q^{n-p}$ (après simplification des facteurs semblables dans les deux membres)

Où U_p désigne le 1^{er} terme.

3) Produit des termes équidistants des termes extrêmes d'une suite géométrique :

Théorème : Le produit de deux termes équidistants des termes extrêmes est égal au produit des termes extrêmes c'est-à-dire $U_p \times U_{n-p} = U_0 \times U_n$

Propriétés :

P₁ : Trois nombres ***a, b, c*** forment une progression géométrique si :

$$b^2 = ac. \text{ (en application du théorème précédent)}$$

P₂ : Trois nombres ***a, b, c*** forment une progression géométrique de raison q si :

$$b = qa \text{ et } c = q^2a.$$

P3 : Quatre nombres a, b, c, d forment une progression géométrique de raison q si :

$$b = qa ; c = q^2a \text{ et } d = q^3a$$

Exemple

Trouver 3 nombres consécutifs $a ; b$ et c d'une suite en progression géométrique sachant que

$$\begin{cases} a \cdot b \cdot c = 8 \\ a + b = -1 \\ c - a = 1 \end{cases}$$

On sait que pour une progression géométrique de 3 termes $a ; b ; c$, on a : $a \times c = b^2$
Ainsi l'équation dévient :

$$\begin{aligned} \begin{cases} (a \cdot c) \cdot b = 8 \\ a + b = -1 \\ c - a = 1 \end{cases} & \Rightarrow \begin{cases} (b^2) \cdot b = 8 \\ a + b = -1 \\ c - a = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b^3 = 8 \\ a + b = -1 \\ c - a = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 3 \\ a + b = -1 \\ c - a = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 3 \\ a = -4 \\ c - a = 1 \end{cases} \\ & \Rightarrow \begin{cases} b = 3 \\ a = -4 \\ c = -3 \end{cases} \end{aligned}$$

D'où les nombres $a ; b$ et c sont tels que $a = -4 ; b = 3$ et $c = -3$

4) Sens de variation d'une suite géométrique :

Soit u_n suite géométrique de raison q et de 1^{er} terme u_0 :

• **1^{er} cas** $U_0 > 0$: si

- $q > 1 \Rightarrow u_n$ est croissante
- $0 < q < 1 \Rightarrow u_n$ est décroissante
- $q = 1$ alors u_n constante

• **2^è Cas** $U_0 < 0$: si

- $q > 1 \Rightarrow u_n$ est croissante
- $0 < q < 1 \Rightarrow u_n$ est décroissante
- $q = 1 \Rightarrow u_n$ est constante

9) Convergence d'une suite géométrique :

La limite d'une suite étant la limite de son terme général une géométrique est convergente si $-1 < q \leq 1$

La suite est divergente si $q \in]-\infty; -1] \cup]1; +\infty[$

5) Somme des termes d'une suite géométrique :

Soit U_n une suite géométrique de raison q et de 1^{er} terme U_0

$$S_n = U_0 + U_1 + U_2 + U_3 + \dots + U_n \quad (1)$$

$$qS_n = qU_0 + qU_1 + qU_2 + qU_3 + \dots + qU_n \quad (2)$$

En effectuant la différence des équations (1) et (2), on a :

$$S_n - qS_n = U_0 - qU_n \text{ or } U_n = U_0 \times q^n$$

$$S_n (1 - q) = U_0 - q(q^n \times U_0)$$

$$S_n (1 - q) = U_0 (1 - q^{n+1})$$

$$S_n = \frac{U_0 (1 - q^{n+1})}{1 - q} \quad (q \neq 1)$$

$$S_n = \frac{\text{1er terme} (1 - \text{raison}^{\text{nombre de terme}})}{1 - \text{raison}}$$

D'une manière générale si U_p est le 1^{er} terme alors l'expression de la somme est :

$$S_n = \frac{U_p (1 - q^{n-p+1})}{1 - q} \quad \text{Avec } (q \neq 1)$$

1) Cas d'une suite géométrique :

Soit u_n une suite géométrique de raison q

- Si $|q| < 1$ alors U_n converge vers 0
- Si $|q| > 1$ alors U_n est divergente
- Si $|q| = 1$ alors U_n converge vers U_0