

Cours de mathématiques TSE

Domaine :SMT

Discipline : mathématiques

Classe : TSE Durée : 2H

Contenu : suites numériques :

Séquence 1 : généralité

Définition :une suite numérique est une fonction définie sur $\mathbb{N}$. on peut noter une suite $(u_n)_{n \in I}$ I étant l'ensemble de définition de la suite. Il y a deux manières de définir une suite :

Par une formule explicite (expression des termes en fonction de leur rang n).

Exemple : $u_n = 2n - 2$ est définie par une formule explicite.

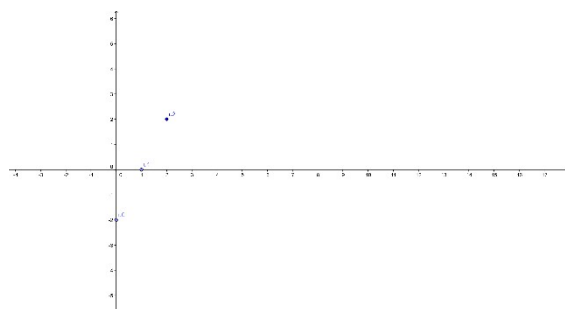
Par une relation de récurrence (relation entre les termes entre eux).

Exemple : $u_{n+1} = 3u_n - 1$ et $u_0 = 1$ est définie par une relation de récurrence.

2. Représentation graphique :

$$u_n = 2n - 2; u_{n+1} = 3u_n - 1 \text{ et } u_0 = 1.$$

NB : La représentation d'une suite numérique est un ensemble de points.



3. Sens de variations :

Activité :

Soit la suite u_n , définie par $u_n = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}^*$

Consigne :

Calculez $u_1; u_2; u_3$

Compare $u_2 - u_1$; $u_3 - u_2$

Une suite est croissante ssi $n \in I$; $u_{n+1} \geq u_n$

Une suite est décroissante ssi $n \in I$; $u_n \geq u_{n+1}$

Evaluation : Étudier les variations de la suite v_n définie par $v_n = \frac{n^2}{3} + 2$.

Séquence 2 : Raisonnement par récurrence

Activité :

On considère la suite (u_n) définie par

$$u_{n+1} = u_n + 2n + 3 \text{ et } u_0 = 1$$

Consigne :

Démontrer par récurrence que :

$$u_n = (n+1)^2$$

Synthèse partielle :

Initialisation :

$$u_0 = 1 \text{ et } (0+1)^2 = 1$$

La propriété est donc vraie pour $n=0$

Hérédité :

Hypothèse de récurrence :

Supposons qu'il existe un entier k tel que la propriété soit vraie : $u_k = (k+1)^2$

Démontrons que :

La propriété est vraie au rang $k+1$.

$$u_{k+1} = (k+2)^2$$

$u_{k+1} = u_k + 2k + 3$, par définition.

$u_{k+1} = (k+1)^2 + 2k + 3$, par hypothèse de récurrence.

$$(k+1)^2 + 2k + 3 = k^2 + 4k + 4 = (k+2)^2$$

Conclusion :

La proposition est vraie au rang $n=0$ et héréditaire à partir de ce rang. D'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout entier naturel n , soit $u_n = (n+1)^2$

Séquence 3 : Suite arithmétique :

1) Définition :

Une suite (u_n) est dite arithmétique s'il existe un réel $r \in \mathbb{R}$ tel que : $u_{n+1} = u_n + r$, le réel r est la raison de la suite u .

- Relation de récurrence : $u_{n+1} = u_n + r$

- Formule explicite : $u_n = u_0 + nr$

La formule explicite se généralise par :

$u_n = u_p + (n-p)r$; u_p est le premier terme.

Exemple :

$u_{n+1} = u_n + 4$; $r = 4$

$v_n = 5 - 3n$; $r = -3$

NB : si $r > 0$, alors u_n est croissante

si $r < 0$, alors u_n est décroissante.

NB : a, b et c sont en progression

arithmétique ssi $a + c = 2b$

2) Somme de termes :

Somme à partir d'un rang p :

$$\sum_{k=p}^n u_k = u_p + \dots + u_n = (n-p+1) \times \frac{u_p + u_n}{2}$$

Séquence 3 : Suite géométrique

1. Définition :

Une suite v_n est dite géométrique, s'il existe un réel q tel que : $v_{n+1} = q v_n$, le réel q est la raison de la suite.

Relation de récurrence : $v_{n+1} = q v_n$

Formule explicite :

$$v_n = v_p q^{n-p}$$

Exemple :

NB : a, b et c sont en progression géométrique ssi $ac = b^2$

2. Somme de termes :

$$\text{Pour } q \neq 1 \quad \sum_{k=p}^n u_k = u_p \frac{1 - q^{n-p+1}}{1 - q}$$

Si $q = 1$ $S = n u_p$

Séquence 3 : Limite de suites

1. Convergence :

Si une suite a une limite finie, on dit qu'elle est convergente. Dans le cas contraire, on dit qu'elle est divergente.

NB : si une suite est convergente alors elle admet une limite unique.

Limite d'une suite arithmétique :

Si $r > 0$ alors la suite tend vers $+\infty$.

Si $r < 0$ alors la suite tend vers $-\infty$

Limite d'une suite géométrique :

Si $q > 1$ et si $u_p > 0$, la suite tend vers $+\infty$

Si $q > 1$ et si $u_p < 0$, la suite tend vers $-\infty$

Si $0 < q < 1$, la suite tend vers 0

Si $q < 0$, la suite n'a pas de limite.

2. Théorème de comparaison de limites :

Soient deux suites u et v de limites respectives l et l' . Si à partir d'un rang $u_n \geq v_n$ alors $l \geq l'$.

Soient deux suites u et v telles que

$u_n \geq v_n$ à partir d'un rang.

Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$

Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$

Suite majorée :

La suite (u_n) est majorée s'il existe un réel M tel que pour entier $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq M$

Suite minorée :

La suite u_n est minorée s'il existe un réel m tel que pour entier $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq m$

Suite bornée :

La suite u_n est bornée si elle est à la fois majorée et minorée.

Théorème de convergence monotone :

Si une suite est croissante et majorée elle est convergente.

Si une suite est décroissante et minorée est convergente.