

SUITES NUMERIQUES

I) Généralités

1) Définition:

On appelle suite numérique toute application U d'une partie I de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$U : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$n \longmapsto U(n) = U_n$$

La suite U sera notée $U(n)_{n \in \mathbb{N}}$

2) Mode de détermination d'une suite

Une suite peut être déterminé par la donnée de :

- Son terme général en fonction de n

Exemple :

- Soit la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $U_n = 4n - 7$. Calculer les trois premiers termes et U_{11} .
 - Soit la suite $(V_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par : $V_n = \frac{1}{2n}$. Calculer V_1 , V_2 et V_4 .
- Son premier terme et d'une relation liant deux termes consécutifs (relation de récurrence). Une telle suite est appelée une suite de récurrence.

Exemple : Soit la suite V_n définie par : $\begin{cases} V_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, V_{n+1} = 2V_n - 3 \end{cases}$. Calculer V_1 , V_2 et V_3

On pose $V_{n+1} = f(V_n)$ ou f désigne une fonction numérique. Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, en traçant la courbe (C_f) et la droite $(D): y = x$, on peut placer les premiers termes de la suite (V_n) .

3) Sens de variation d'une suite

-

Soit $(U_n)_{n \in I}$ une suite numérique telle que :

- Si $\forall n \in I, U_{n+1} - U_n \geq 0$ (ou $\frac{U_{n+1}}{U_n} \geq 1$) alors (U_n) est croissante sur I

- Si $\forall n \in I \ U_{n+1} - U_n \leq 0$ (ou $\frac{U_{n+1}}{U_n} \leq 1$) alors (U_n) est décroissante sur I
- Si $\forall n \in I \ U_{n+1} - U_n = 0$ (ou $\frac{U_{n+1}}{U_n} = 1$) alors (U_n) est constante sur I

Remarque

- Si $\forall n \in I \ U_{n+1} - U_n > 0$ ($\frac{U_{n+1}}{U_n} > 1$) alors (U_n) est strictement croissante sur I
- Si $\forall n \in I \ U_{n+1} - U_n < 0$ ($\frac{U_{n+1}}{U_n} < 1$) walors (U_n) est strictement décroissante sur I

Exemple : Etudier le sens de variation des suites $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(V_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par :

$$U_n = 3n - 4 \text{ et } V_n = \frac{2}{n}$$

4) Suite majorée - Suite minorée

Soit $(U_n)_{n \in I}$ une suite numérique

- $(U_n)_{n \in I}$ est majorée par α si et seulement si $\forall n \in I \ U_n \leq \alpha$
- $(U_n)_{n \in I}$ est minorée par β si et seulement si $\forall n \in I \ U_n \geq \beta$

NB : Toute suite majorée et minorée est dite bornée.

Exemple : Soit $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite définie par $U_n = \sin n$

5) Suites convergentes

Une suite $(U_n)_{n \in I}$ est dite convergente si elle admet une limite finie c'est - à - dire $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = l$ (l finie). On dira que (U_n) est convergente et converge vers l . Une suite qui n'est pas convergente est dite divergente.

Exemple : Soit la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $U_n = \frac{3n+1}{n+2}$. (U_n) est - elle convergente ?

II) Suites arithmétiques - Suites géométriques

1) Suites arithmétiques

a) Définition

On appelle suite arithmétique toute suite dont chaque terme s'obtient à partir du précédent par addition d'une suite constante réelle r appelée raison de la suite $U_{n+1} = U_n + r$

Exemple : Soit $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite définie par $U_n = 5n - 1$. (U_n) est-elle arithmétique ?

b) Expression du terme général

Soit $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite arithmétique de premier terme U_p et raison r . L'expression générale (ou formule explicite) de la suite (U_n) est donnée par la relation

$$U_n = U_p + (n - p)r$$

- Si U_0 est le premier terme de la suite (U_n) alors $U_n = U_0 + nr$
- Si U_1 est le premier terme de la suite U_n alors $U_n = U_1 + (n - 1)r$

Exemple :

- Soit (U_n) une suite arithmétique de raison $r = 3$ et le premier terme $U_0 = 2$. Exprimer (U_n) en fonction de n .
- Soit (U_n) une suite arithmétique tel que $U_3 = 15$ et $U_8 = 25$. Calculer U_0 et la raison r .

c) Somme des n premiers termes

L'expression de la somme S_n de premier terme U_p ($p \in \mathbb{N}$) est :

$$S_n = \frac{n - p + 1}{2} (U_p + U_n).$$

Si U_1 est le premier terme alors S_n est : $S_n = U_1 + U_2 + \dots + U_n = \frac{n}{2} (U_1 + U_n)$.

Si U_0 est le premier terme alors on a la somme $S_n = \frac{n+1}{2} (U_0 + U_n)$ or on a

$$U_n = U_0 + nr \text{ donc } S_n = \frac{n+1}{2} (2U_0 + nr)$$

Remarque

Soit (U_n) une suite arithmétique de raison r

- Si $r > 0$ alors (U_n) est croissante.
- Si $r < 0$ alors (U_n) est décroissante.
- Si $r = 0$ alors (U_n) est constante.

- Lorsque $r=0$, on peut dire que la suite (U_n) est convergente.
- Lorsque $r \neq 0$, on peut dire que la suite (U_n) est divergente.

Soit a, b, c trois termes consécutifs d'une suite arithmétique, a, b, c sont en progression arithmétique si et seulement si $a+c=2b$

2) Suites géométriques

a) Définition

On appelle suite géométrique toute suite dont chaque terme s'obtient à partir du précédent par multiplication d'une suite constante non nulle, de raison q tel que $U_{n+1}=qU_n$

Exemple : Soit (U_n) une suite définie par $U_n=3^n$. (U_n) est-elle géométrique ?

b) Expression du terme général

Soit (U_n) une suite géométrique de premier terme U_p ($p \in \mathbb{N}$) et de raison q . L'expression générale est de la forme $U_n=U_p \cdot q^{n-p}$.

Si U_0 est le premier terme alors $U_n=U_0 \cdot q^n$

Exemple : Sachant que $U_0=-2$ et $q=3$. Calculer le dixième terme de la suite.

c) Somme des termes consécutifs d'une suite géométrique

Soit (U_n) une suite de premier terme U_p et de raison q tel que $q \neq 1$. La somme des n termes est donnée par la relation $S_n=U_p \frac{q^{n-p+1}-1}{q-1}$

Pour tout entier naturel non nul n $U_1+U_2+\dots+U_n=U_1 \frac{q^n-1}{q-1}$

Pour tout entier naturel n $U_0+U_1+U_2+\dots+U_n=U_0 \frac{q^{n+1}-1}{q-1}$

Remarque

Soit (U_n) une suite géométrique de raison q et de terme général U_n

- Si $|q|<1$ alors (U_n) converge et $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n=0$
- Si $|q|>1$ alors (U_n) diverge

- Soient trois termes consécutifs a, b, c pris dans cet ordre sont en progression géométrique si et seulement si $a \times c = b^2$

III) Raisonnement par récurrence

Soit $P(n)$ une propriété dépendant de n , pour montrer par récurrence que la propriété $P(n)$ est vraie, on procède comme suite :

- Vérifier qu'il existe un entier naturel n_0 tel que $P(n_0)$ soit vraie
- Supposer que $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq 0$ et montrer que $P(n+1)$ est vraie
- Si les deux conditions sont vérifiées alors on conclut que la propriété $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq n_0$

Exemple :

Démontrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, 3^{2n+1} + 2^{n+2}$ est divisible par 7

Soit $P(n)$ la propriété tel que : $\forall n \in \mathbb{N}, 3^{2n+1} + 2^{n+2} = 7k \quad k \in \mathbb{R}$

Si $n=0$ alors $P(0)=7$ vraie

Supposons la relation vraie à l'ordre n et montrons que c'est vrai à l'ordre $n+1$ c'est -à -dire $3^{2n+1} + 2^{n+2} = 7k$

$$P(n+1) = 3^{2(n+1)+1} + 2^{(n+1)+2} = 7k \quad ?$$

$$3^{2(n+1)+1} + 2^{(n+1)+2} = 3^{2n+1+2} + 2^{n+2+1}$$

$$= 3^2 \cdot 3^{2n+1} + 2 \cdot 2^{n+2} = (7+2)3^{2n+1} + 2 \cdot 2^{n+2}$$

$$= 7 \cdot 3^{2n+1} + 2(3^{2n+1} + 2^{n+2}) = 7(3^{2n+1} + 2k)$$

$$= 7k \text{ d'où } P(n+1) \text{ est vraie.}$$

Par suite $\forall n \in \mathbb{N}, 3^{2n+1} + 2^{n+2}$ est divisible par 7.