

ETUDE DES SUITES NUMERIQUES : (TSE-STI : GC-GM-GMI-GEL N-GEL-GEN)

1 Etude générale d'une suite :

Activité 1 :

Un voyageur, partant d'une ville A vers B distant de 350 km, décide de parcourir 17,5 km par jour.

a) Quelle est la distance parcourue au bout de : 1j ; 2j ; 3j ; ... ; nj ?

b) Au bout de combien de jours arrivera-t-il à destination ?

Activité 2 :

Une usine de production de sucre démarre avec une production de 2000 tonnes. On suppose que la production augmente de 10% par an.

Quelle est la production au bout de : 1 an ; 2 ans ; 3 ans ; ... ; n ans ?

1-1 Définition :

On appelle suite numérique toute application d'une partie I de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{R}$.

$U: I \rightarrow \mathbb{R}$

$n \mapsto U(n)$. La suite U est notée $(U_n)_{n \in I}$, $U(n)$ est notée U_n .

Une suite numérique (U_n) est déterminée par :

■ Une formule explicite permettant de calculer U_n en fonction de n .

Exemple :

1) Soit $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite de terme général $U_n = 10n - 13$. Calcule U_0 , U_1 , U_2 et U_{100} .

2) Soit $(V_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite définie par $V_n = \frac{1}{n}$. Calcule V_1 , V_2 et V_{10} .

■ Le premier terme et une formule de récurrence.

Exemple :

Soit $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par :
$$\begin{cases} U_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = \frac{1}{2}U_n - 1 \end{cases}$$
 Calcule U_1 et U_2 .

1-2 Suites monotones :

Soit $(U_n)_{n \in I}$ une suite numérique :

■ Si pour tout $n \in I$, $U_{n+1} \geq U_n$ alors la suite (U_n) est croissante.

■ Si pour tout $n \in I$, $U_{n+1} \leq U_n$ alors la suite (U_n) est décroissante.

■ Si pour tout $n \in I$, $U_{n+1} = U_n$ alors la suite (U_n) est constante.

Remarques :

■ Si pour tout $n \in I$, $U_{n+1} > U_n$ (respectivement $U_{n+1} < U_n$) alors la suite (U_n) est strictement croissante (respectivement strictement décroissante).

■ Une suite (U_n) est monotone lorsqu'elle est soit croissante, soit décroissante.

■ Une suite (U_n) est croissante (respectivement décroissante) à partir d'un certain rang s'il existe un entier naturel n_0 tel que, $\forall n \geq n_0$ on a : $U_{n+1} \geq U_n$ (respectivement $U_{n+1} \leq U_n$).

■ Une suite (U_n) est stationnaire si elle est constante à partir d'un certain rang.

Pour démontrer qu'une suite (U_n) est monotone, on peut utiliser l'un des procédés suivants :

■ Etudier le signe de $U_{n+1} - U_n$.

■ Comparer à 1 le quotient $\frac{U_{n+1}}{U_n}$, lorsque la suite (U_n) est strictement positive.

■ Etudier le sens de variation de la fonction f , lorsque la suite est du type : $U_n = f(n)$.

■ Faire un raisonnement par récurrence, lorsque la suite est du type : $U_{n+1} = f(U_n)$.

Exercice :

1) Etudie le sens de variation des suites numériques :

a) $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $U_n = \frac{1}{n+1}$. b) $(V_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par : $V_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.

c) $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $W_n = \frac{2^n}{3^{n+1}}$.

2) Soit $f(x) = x - \ln x$, $(T_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite définie par : $T_n = n - \ln n$.

a) Etudie le sens de variation de f sur $[1; +\infty[$. b) En déduis le sens de variation de la suite $(T_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

3) Soit $f(x) = x + 4e^{-x}$, $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite définie par : $Y_n = n + 4e^{-n}$.

a) Etudie le sens de variation de f sur $[0; +\infty[$. b) En déduis le sens de variation de la suite $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

4) $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $K_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, K_{n+1} = e^{K_n}$. Montre par récurrence que la suite $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement croissante.

5) On considère la suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par : $X_n = \frac{n^2+10}{2n}$. Justifie que $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante à partir du rang 4.

1-3 Suites bornées :

Soit $(U_n)_{n \in I}$ une suite numérique :

■ Une suite (U_n) est minorée par α si $\forall n \in I, U_n \geq \alpha$.

■ Une suite (U_n) est majorée par β si $\forall n \in I, U_n \leq \beta$.

■ Une suite (U_n) est bornée si elle est à la fois minorée et majorée.

Exemple :

Soit $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite de terme général : $U_n = \sum_{p=1}^n \frac{1}{p^2}$

1) Démontre que pour tout entier naturel p supérieur ou égal à 2, on a : $\frac{1}{p^2} \leq \frac{1}{p-1} - \frac{1}{p}$.

2) Démontre que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, U_n \leq 2 - \frac{1}{n}$. En déduis que la suite (U_n) est bornée.

1-4 Théorèmes de comparaison :

⊙ Soit (U_n) une suite numérique :

■ S'il existe une suite (V_n) telle que $U_n \geq V_n$ à partir d'un rang n_0 et $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = +\infty$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = +\infty$.

■ S'il existe une suite (V_n) telle que $U_n \leq V_n$ à partir d'un rang n_0 et $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = -\infty$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = -\infty$.

⊙ Soit (U_n) une suite et l un nombre réel :

■ S'il existe deux suites (V_n) et (W_n) telles que à partir d'un certain rang $V_n \leq U_n \leq W_n$ et si

$\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} W_n = l$ (l un nombre réel) alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = l$. (Théorème des gendarmes).

■ S'il existe une suite (V_n) telle que $|U_n - l| \leq V_n$ à partir d'un certain rang et si $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = 0$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = l$.

Remarque : Soit a un nombre réel non nul :

Si $|a| < 1$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} a^n = 0$; Si $a > 1$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} a^n = +\infty$.

Exemple :

1) Soit la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que : $\forall n \in \mathbb{N}, U_n \geq 2^n$. Détermine $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$.

2) Soit la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que : $\forall n \in \mathbb{N}, |U_n - 2| \leq \frac{5}{2^n}$. Détermine $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$.

3) Soit la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $U_n = \frac{\cos(n)}{1+n^2}$.

Démontre que : $\forall n \in \mathbb{N}, -\frac{1}{1+n^2} \leq U_n \leq \frac{1}{1+n^2}$. En déduis $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$.

Exercice 1 :

Soit la suite $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $T_n = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$ avec $x > 0$.

Calcule $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(T_n)$, en déduis $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$.

Exercice 2 :

Soit la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :
$$\begin{cases} U_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = U_n + 2n + 3 \end{cases}$$

1) Précise le sens de variation de la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

2) Démontre que : $\forall n \in \mathbb{N}, U_n > n^2$; en déduis la limite de la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

3) Conjecture une expression de U_n en fonction de n puis démontre la propriété ainsi conjecturée.

1-5 Suites convergentes :

Soit (U_n) une suite et l un nombre réel. Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = l$ alors (U_n) est convergente et converge vers l .

Une suite qui n'est pas convergente est dite divergente.

Exemple :

Etudie la convergence des suites numériques suivantes :

a) $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $U_n = \frac{2n+3}{n+1}$. b) $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $V_n = 7 - 5n$

c) $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $W_n = \frac{3^n - 5^n}{3^n + 5^n}$.

Propriétés :

■ Toute suite croissante et majorée est convergente.

■ Toute suite décroissante et minorée est convergente.

1-6 Etude d'une suite du type $U_{n+1} = f(U_n)$:

Activité :

Soit $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par :
$$\begin{cases} U_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = \frac{1}{2}U_n - 1 \end{cases}$$
 Soit $f(x) = \frac{1}{2}x - 1$

1) Construis la courbe (C_f) de f et la droite $(\Delta): y = x$ dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

2) a) Place, sans calculer, sur l'axe des abscisses les 4 premiers termes de la suite (U_n) .

b) Formule une conjecture sur le sens de variation et la convergence de la suite (U_n) .

Propriété :

Soit (U_n) une suite dont le terme général vérifie $U_{n+1} = f(U_n)$, où f est une fonction. Si (U_n) converge vers l et f est continue en l alors $f(l) = l$.

Exercice :

Soit la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $U_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = \sqrt{U_n + 6}$.

1) a) Démontre par récurrence que la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est majorée par 3.

b) Démontre par récurrence que la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.

c) La suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est-elle convergente ? Justifie votre réponse.

2) Soit la fonction f définie pour $x \in [0; 3]$ par $f(x) = \sqrt{x + 6}$.

a) Montre que : $\forall x \in [0; 3], |f'(x)| \leq \frac{1}{3}$.

b) Montre par récurrence que tout entier naturel $n : U_n \in [0; 3]$.

c) Montre que pour tout entier naturel n on a : $|U_{n+1} - 3| \leq \frac{1}{3}|U_n - 3|$.

d) En déduis que : $\forall n \in \mathbb{N}, |U_n - 3| \leq 3 \left(\frac{1}{3}\right)^n$.

e) Détermine la limite de la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

2 Suites arithmétiques-Suites géométriques :

2-1 Suites arithmétiques :

2-1-1 Définition :

Une suite (U_n) est arithmétique si, et seulement si $U_{n+1} = U_n + r$ où r est une constante appelée la raison de la suite.

2-1-2 Expression du terme général :

Soit (U_n) une suite arithmétique de premier terme U_p et de raison r on a : $U_n = U_p + (n - p)r$.

Si U_0 est le premier terme de la suite alors on a : $U_n = U_0 + nr$.

Si U_1 est le premier terme de la suite alors on a : $U_n = U_1 + (n - 1)r$.

2-1-3 Somme des termes consécutifs :

$$S_n = U_p + \dots + U_n = \frac{n-p+1}{2}(U_p + U_n). \quad S_n = U_1 + U_2 + \dots + U_n = \frac{n}{2}(U_1 + U_n)$$

$$S_n = U_0 + U_1 + \dots + U_n = \frac{n+1}{2}(U_0 + U_n) \text{ ou } S_n = U_0 + U_1 + \dots + U_n = \frac{n+1}{2}(2U_0 + nr).$$

Remarques :

■ Soit (U_n) une suite arithmétique de raison r :

Si $r > 0$ alors (U_n) est croissante

Si $r < 0$ alors (U_n) est décroissante

Si $r = 0$ alors (U_n) est constante

Si $r = 0$ alors (U_n) est convergente. Si $r \neq 0$ alors (U_n) est divergente.

■ Soit a, b et c trois termes consécutifs d'une suite arithmétique on a : $a + c = 2b$.

Exercice :

Soit $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite arithmétique définie par : $U_{35} = 110$ et $U_{106} = 323$

1) Détermine le premier terme U_0 et la raison de cette suite.

2) Exprime U_n en fonction de n .

3) Quel est le sens de variation de la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

4) a) Calcule $S = U_{23} + U_{24} + \dots + U_{92}$.

b) Exprime en fonction de n : $S_n = U_0 + U_1 + \dots + U_{n-1}$.

2-2 Suites géométriques :

2-1-1 Définition :

Une suite (U_n) est géométrique si, et seulement si $U_{n+1} = qU_n$ ou $\frac{U_{n+1}}{U_n} = q$ avec q est une constante non nulle appelée la raison de la suite.

2-1-2 Expression du terme général :

Soit (U_n) une suite géométrique de premier terme U_p et de raison q on a : $U_n = U_p \times q^{n-p}$.

Si U_0 est le premier terme de la suite alors on a : $U_n = U_0 \times q^n$.

Si U_1 est le premier terme de la suite alors on a : $U_n = U_1 \times q^{n-1}$.

2-1-3 Somme des termes consécutifs :

$$S_n = U_p + \dots + U_n = U_p \frac{1-q^{n-p+1}}{1-q} \text{ avec } q \neq 1. \quad S_n = U_1 + U_2 + \dots + U_n = U_1 \frac{1-q^n}{1-q} \text{ avec } q \neq 1.$$

$$S_n = U_0 + U_1 + \dots + U_n = U_0 \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \text{ avec } q \neq 1.$$

Si $q = 1$ alors $S_n = U_1 + U_2 + \dots + U_n = n \times U_1$.

Remarques :

■ Soit (U_n) une suite géométrique de raison $q \neq 0$ et de premier terme U_p :

Si $U_p > 0$ et $0 < q < 1$ alors (U_n) est décroissante. Si $U_p > 0$ et $q > 1$ alors (U_n) est croissante

Si $U_p < 0$ et $0 < q < 1$ alors (U_n) est croissante. Si $U_p < 0$ et $q > 1$ alors (U_n) est décroissante.

Si $|q| < 1$ alors (U_n) est convergente et converge vers 0. ($|q| < 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$).

Si $q > 1$ alors (U_n) est divergente.

■ Soit a, b et c trois termes consécutifs d'une suite géométrique on a : $a \times c = b^2$.

Exercice 1 :

Soit $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite géométrique définie par : $V_4 = 16$ et $V_7 = 128$

1) Détermine le premier terme V_0 et la raison de cette suite.

2) Exprime V_n en fonction de n .

3) Quel est le sens de variation de la suite $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

4) a) Calcule $S = V_3 + V_4 + \dots + V_{10}$.

b) Exprime en fonction de n : $S_n = V_0 + V_1 + \dots + V_{n-1}$.

Exercice 2 :

Soit $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par :
$$\begin{cases} U_0 = 7 \\ \forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = \frac{2U_n + 6}{5} \end{cases}$$

1) Calcule U_1, U_2 et U_3 .

2) On considère la suite $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $V_n = U_n - 2, \forall n \in \mathbb{N}$.

a) Exprime V_{n+1} en fonction de V_n . En déduis la nature de la suite $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dont on précisera les éléments caractéristiques.

b) Exprime V_n puis U_n en fonction de n .

c) Calcule $S_n = \sum_{i=0}^n V_i$ et $S'_n = \sum_{i=0}^n U_i$.

Exercice 3 :

Soit (U_n) la suite définie par : $U_1 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, U_{n+1} = 2U_n - \frac{1}{3}$

1) Détermine le nombre réel a pour que la suite $(V_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de terme général $V_n = U_n - a$ soit une suite géométrique.

2) Exprime V_n en fonction de n et calcule $\sum_{p=1}^n V_p$.

3) Exprime U_n en fonction de n et calcule $\sum_{p=1}^n U_p$.

Exercice 4 :

Trouve trois nombres réels a, b, c positifs ($a \leq b \leq c$) constituant dans cet ordre les premiers termes d'une suite arithmétique et vérifiant simultanément les deux conditions :

$$\begin{cases} a + b + c = 12 \\ a^2, 3b, c^2 \text{ constituent dans cet ordre les trois premiers termes d'une suite géométrique} \end{cases}$$

Exercice 5 :

1) Détermine les suites arithmétiques d'entiers rationnels de raison 6 dont le produit des 4 premiers termes est 385.

2) Soit $(V_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite définie par : $V_n = 1 + e^{\frac{1}{n}} + e^{\frac{2}{n}} + \dots + e^{\frac{n-1}{n}}$

a) Montre que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, V_n = \frac{1-e}{1-e^{\frac{1}{n}}}$.

b) Calcule $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n$.