

I- Généralité :

1) Définition :

On appelle suite numérique toute fonction définie de $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$. On note

$$U : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$n \rightarrow u(n) = u_n$$

2) Mode de définition d'une suite :

-Une suite peut être définie par une formule explicite c'est-à-dire u_n en fonction de n :

$$u_n = f(n).$$

Exemple : $u_n = n + 3$; $v_n = \frac{2n-4}{n+1}$; $w_n = 4n^2 - 3n + 1$

-Une suite peut être définie par son 1^{er} terme et une formule de récurrence, c'est-à-dire u_{n+1} s'exprime en fonction de u_n .

Exemple : Soit la suite :
$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{3}{2}u_n + 4 \end{cases}$$

3) Sens de variation d'une suite

- Si $u_{n+1} - u_n \geq 0$; $\forall n \in \mathbb{N}$ alors u_n est croissante
- Si $u_{n+1} - u_n \leq 0$; $\forall n \in \mathbb{N}$ alors u_n est décroissante
- Si $u_{n+1} - u_n = 0$; $\forall n \in \mathbb{N}$ alors u_n est constante

4) Représentation des termes d'une suite :

Pour représenter les termes d'une suite u_n sur l'axe des abscisses, on trace la 1^{ère} bissectrice (D) d'équation $y = x$. Ainsi on trace la fonction associée à la suite u_n en posant $u_n = x$ et $u_{n+1} = f(x)$. On détermine les termes de la suite sur l'axe des abscisses par projection.

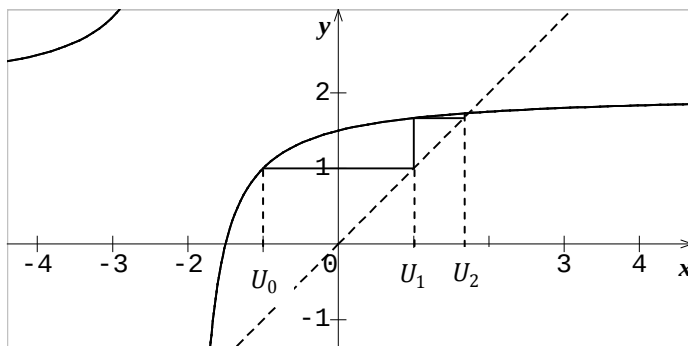
Exemple : Soit (u_n) définie Par :
$$\begin{cases} U_0 = -1 \\ U_{n+1} = \frac{3+2U_n}{2+U_n} \end{cases}$$

Représenter sur l'axe (ox) les 3 premiers termes de la suite u_n .

Solution

Désignons par f la fonction définie sur $] -2 ; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{3+2x}{2+x}$

En suivant les règles de construction ci-dessus, on a la représentation suivante :



II- Convergence d'une suite

Définitions :

- Une suite u_n est dite **convergente** si et seulement si son terme général u_n admet une limite finie.

On note : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$ avec $l \in \mathbb{R}$. Alors u_n est dite convergente.

- Une suite u_n est dite **divergente** si et seulement si son terme général u_n admet une limite infinie.

On note : $\lim_{n \rightarrow -\infty} u_n = +\infty$ ou $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$. Alors u_n est dite divergente.

III- Suite majorée – minorée – bornée :

1) Définitions :

- Une suite u_n est majorée si et seulement $\forall a \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N} : u_n \leq a$.
- Une suite u_n est minorée si et seulement $\forall a \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N} : u_n \geq b$.
- Une suite u_n est bornée si et seulement $\forall a \in \mathbb{R} ; b \in \mathbb{R}$ et que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a :

$$b \leq u_n \leq a$$

2) Théorèmes :

a) Théorème 1 :

- Toute suite croissante et majorée est convergente.
- Toute suite décroissante et minorée est convergente.

b) Théorème 2 :

Tout sous-ensemble non vide E de nombres réels a une borne supérieure A, c'est-à-dire :
 $\forall x \in E ; x \leq A$

3) Propriétés :

Soient u_n et v_n deux suites telles que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = l'$$

On a les propriétés suivantes :

P₁ : Si $u_n \leq v_n$: alors $l \leq l'$

P₂ : $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n + v_n) = l + l'$

P₃ : Si (u_n) est bornée et si (v_n) est divergente, alors :

$$\text{a) } \lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n + v_n) = \infty \quad \text{b) } \lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n \times v_n) = \infty$$

IV- Relations entre les limites :

Théorème : (Théorème des gendarmes).

Considérons les trois suites u_n ; v_n et w_n ($n > n_0$)

Tel que : $u_n \leq v_n \leq w_n$

u_n et w_n Si converge vers la même limite l ; alors v_n converge vers l .

Preuve :

A partir de la relation donnée entre les suites on a :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} v_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} w_n$$

$$\text{Alors } \lim_{n \rightarrow \infty} v_n = l$$

V- Suites Adjacentes :

Définition :

Une suite (u_n) est adjacente à une autre suite (v_n) si l'une des deux suites est décroissante tandis que l'autre est croissante et si : $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - v_n) = 0$

Théorème 1 :

Si les suites u_n et v_n sont adjacentes (u_n croissante et v_n décroissante) alors :

$$\forall n \in \mathbb{N} \text{ on a : } u_n \leq v_n .$$

Preuve :

Supposons que le contraire de la conclusion du théorème soit vrai pour $n = k$, c'est-à-dire :

$$u_k \geq v_k .$$

Pour $n > k$, puisque u_n est décroissante et que v_n est décroissante, on a :

$$u_n \geq u_k \geq v_k \geq v_n$$

$$(u_n - v_n) \geq (u_k - v_k)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (u_n - v_n) \neq 0$$

Théorème 2 : si deux suites sont adjacentes, alors elles convergent toutes deux vers une même limite.

Preuve :

Puis que les suites sont adjacentes et que u_n est croissante et v_n décroissante, le **théorème 1** implique : $u_0 \leq u_n \leq v_n \leq v_0$

On note alors que :

- a) u_n est croissante et elle est majorée par v_0 , donc elle converge vers l .
- b) v_n est décroissante et elle est minorée par u_0 donc elle converge vers l' .

Ainsi

$$\lim (u_n - v_n) = l - l' \Rightarrow 0 = l - l' \Leftrightarrow l = l'$$

$$x \rightarrow +\infty$$

Ce qu'il fallait Prouve.

VI- Suite Arithmétique**1) Définition :**

Une suite u_n est dite arithmétique si et seulement si : $\forall n \in \mathbb{N}; u_{n+1} - u_n = r$.

Où r est appelée la raison de la suite u_n .

2) Expression du terme général :

D'une façon générale si u_p est le premier terme, l'expression du terme générale d'une suite arithmétique est : $u_n = u_p + (n - p)r$

3) Termes équidistants d'une suite :

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, une suite arithmétique p un entier naturel tel que $p \leq n$ les termes u_p et u_{n-p} sont des termes équidistants des termes extrêmes u_0 et u_n car il ya p termes avant le terme u_p et p termes après le terme u_{n-p}

4) Somme des termes équidistants d'une suite arithmétique

Soit p un entier naturel tel que $p \leq n$

Les termes u_p et u_{n-p} sont des termes équidistants des termes extrêmes

$$u_p + u_{n-p} = (u_0 + pr) + (u_0 + (n - p)r) = u_0 + (u_0 + nr) \text{ d'où } u_p + u_{n-p} = u_0 + u_n$$

Théorème :

La somme de deux termes équidistants d'une suite arithmétique est égale à la somme des termes extrêmes.

5) Propriétés :

En application du théorème on a :

P₁ : Trois nombres a ; b ; c forment une progression arithmétique si : $2b = a + c$.

Preuve : Soit a ; b et c trois réels

$$b = a + r$$

$$c = b + r$$

$$a + c = a + b + r = 2a + 2r = 2(a + r). \text{ Alors : } a + c = 2b$$

P₂: Trois nombres **a, b, c** forment une progression arithmétique de raison r si :
 $b = a + r$ et $c = a + 2r$.

P₃: Quatre nombres **a, b, c, d** forment une progression arithmétique de raison r si :
 $3b - d = 2d$

P₄: Soit u_n une suite arithmétique de 1^{er} terme u_0 . La somme de deux termes équidistants est toujours à la somme des extrêmes

$u_0, u_1, u_2 \dots u_{n-2}; u_{n-1}; u_n; u_1; u_{n-1}$ sont équidistants.

D'une manière générale, on a : $u_0 + u_n = u_p + u_{n-p}$

6) Sens de variation d'une suite arithmétique

Soit u_n une suite arithmétique de raison r . On a : $u_{n+1} - u_n = r$ d'où :

- Si $r > 0$ alors u_n est croissante
- Si $r < 0$ alors u_n est décroissante
- Si $r = 0$ alors u_n est constante

7) Somme des n premiers termes d'une suite arithmétique :

Soit u_n une suite arithmétique de 1^{er} terme u_p et de raison r .

La somme des n premiers termes d'une suite arithmétique est :

$$S_n = \frac{(n-p+1)(u_p + u_n)}{2} \quad \text{ou} \quad S_n = \frac{(n-p+1)[2u_p + (n-p)r]}{2}$$

VII- Suites géométriques

1) Définition :

U_n est une suite géométrique si et seulement si : $\forall n \in \mathbb{N};$ on a : $\frac{U_{n+1}}{U_n} = q$ ou $U_{n+1} = qU_n$. Où q est un réel fixé appelé la raison de la suite géométrique.

2) Expression du terme générale

D'une façon générale si u_p est le 1^{er} terme et r sa raison, alors l'expression du terme générale d'une suite géométrique est : $u_n = u_p (q)^{n-p}$

3) Produit des termes équidistants des termes extrêmes d'une suite géométrique :

Théorème :

Le produit de deux termes équidistants des termes extrêmes est égal au produit des termes extrêmes c'est-à-dire : $u_0 \times u_{n-p} = u_0 \times u_n$.

4) Propriétés :

P₁: Trois nombres **a ; b ; c** forment une progression géométrique si : $b^2 = ac$.

P₂: Trois nombres a ; b ; c forment une progression géométrique de raison q si :
 $b = qa$ et $c = q^2a$.

P₃: Quatre nombres a ; b ; c et d forment une progression géométrique de raison q si :
 $b = qa$; $c = q^2a$ et $d = q^3a$

5) Sens de variation d'une suite géométrique :

Soit u_n suite géométrique de raison et de 1^{er} terme u_0 :

- 1^{er} cas $u_0 > 0$: si
 - $q > 1$ alors la suite u_n est croissante
 - $0 < q < 1$ alors la suite u_n est décroissante
 - $q = 1$ alors la suite u_n constante ou stationnaire
- 2^e Cas $u_0 < 0$: si
 - $q > 1$ alors la suite u_n est décroissante
 - $0 < q < 1$ alors la suite u_n est croissante
 - $q = 1$ alors la suite u_n est constante

6) Convergence d'une suite géométrique :

La limite d'une suite étant la limite de son terme général, une suite géométrique est convergente si $-1 < q \leq 1$ et est divergente si $q \in]-\infty; -1] \cup]1; +\infty[$

7) Somme des termes d'une suite géométrique :

D'une manière générale si u_p est le 1^{er} terme alors l'expression de la somme est :

$$S_n = \frac{u_p(1 - q^{n-p+1})}{1 - q} \quad (q \neq 1)$$

8) Cas d'une suite géométrique :

Soit u_n une suite géométrique de raison q

- Si $|q| < 1$ alors la suite u_n converge vers 0
- Si $|q| > 1$ alors la suite u_n est divergente
- Si $|q| = 1$ alors la suite u_n converge vers u_0

VIII- Notion sur les intérêts simples et intérêts composés :

Les intérêts :

L'intérêt est la rémunération d'un placement pendant une période donnée, (c'est-à-dire entre un temps T_1 et un temps T_2).

Ainsi les intérêts sont classés en deux catégories: (**intérêts simples et intérêts composés**).

NB :

- L'intérêt simple est utilisé pour des placements à court et moyen terme.
- L'intérêt composé est utilisé pour des placements à long terme.

a- Intérêts simples :

Un placement est fait à intérêt simple, lorsque, à des époques fixées d'avance celui qui prête ou place son argent en touche les intérêts de façon que le capital placé reste le même jusqu'à l'époque du remboursement.

Sa formule est : $I = \frac{c \cdot t \cdot n}{P} = \frac{(\text{Capital placé}) \cdot (\text{Taux d'intérêt}) \cdot (\text{Durée du placement})}{\text{Période}}$

NB :

- Si : n est en **jours**, alors la **période** $P = 36.000$.
- Si : n est en **mois**, alors la **période** $P = 1.200$.
- Si : n est en **année**, alors la **période** $P = 100$.

b- Intérêts composés :

Un placement est fait à intérêt composé, lorsque, à la fin de chaque unité de temps, l'intérêt est ajouté au capital pour produire un intérêt à son tour, pendant l'unité de temps suivante.

Sa formule est :

$$I_n = C_0[(1 + i)^n - 1] = (\text{Capital initial})[(1 + \text{taux d'intérêt})^{\text{Durée}} - 1]$$

NB :

- 1 an = 2 semestres = 4 trimestres = 12 mois.
- 1 semestre = 2 trimestres = 6 mois = $\frac{1}{2}$ an.
- 1 trimestre = $\frac{1}{2}$ semestre = 3 mois = $\frac{1}{4}$ an.
- 1 bi - an = 4 semestres = 8 trimestres = 24 mois = 2 ans.

c- Valeurs acquises :

$$C_n = C_0(1 + i)^n = (\text{Capital initial})(1 + \text{Taux d'intérêt})^{\text{Durée}}$$

NB : Le taux d'intérêt s'exprime toujours en pourcentage (%)