

Les suites numériques

I . Comportement d'une suite numérique :

Définition :

Une suite est une application de l'ensemble $\mathbb{N}$ dans l'ensemble $\mathbb{R}$.

$$\left. \begin{array}{l} (U_n): \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R} \\ n \longmapsto U_n \end{array} \right\} .$$

Définitions :

1. Une suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante $\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, U_n \leq U_{n+1}$.
2. Une suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante $\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, U_n \geq U_{n+1}$.
3. Une suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est monotone signifie qu'elle est soit croissante soit décroissante.

Remarques :

1. On parle aussi de suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ croissante à partir d'un rang $n_0 \in \mathbb{N}$
 $\Leftrightarrow \forall n \geq n_0, U_n \leq U_{n+1}$

2. On définit aussi les suites strictement croissantes ou décroissantes en remplaçant les inégalités par des inégalités strictes .

Méthode 1 :

Considérons la suite (U_n) définie par $\forall n \in \mathbb{N}, U_n = n^2$ (car n est un entier naturel donc positif) donc $U_{n+1} - U_n > 0 \Leftrightarrow U_{n+1} > U_n$ donc la suite (U_n) est strictement croissante sur $\mathbb{N}$.

Méthode 2 :

Pour une suite (U_n) à termes strictement positifs : comparer $\frac{U_{n+1}}{U_n}$ et 1.

Considérons la suite (U_n) définie par $\forall n \in \mathbb{N}, U_n = e^{n^2}$

$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{e^{(n+1)^2}}{e^{n^2}} = e^{(n+1)^2 - n^2} = e^{n^2 + 2n + 1 - n^2} = e^{2n+1} > e^0$ car la fonction exp est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et $2n+1 > 0$.

donc $\frac{U_{n+1}}{U_n} > 1$ car $e^0 =$

ainsi $\frac{U_{n+1} \times U_n}{U_n} > 1 \times U_n$

car (U_n) est à termes strictement positifs .

$U_{n+1} > U_n$ donc (U_n) est strictement croissante sur $\mathbb{N}$.

Définitions :

1. Une suite (U_n) est majorée lorsqu'il existe un réel M (un majorant) tel que $\forall n \in \mathbb{N}, U_n \leq M$.
2. Une suite (U_n) est minorée lorsqu'il existe un réel m tel que $\forall n \in \mathbb{N}, U_n \geq m$.
3. Une suite (U_n) est bornée lorsqu'elle est majorée et minorée.

Remarques :

1. Si (U_n) est une suite croissante, alors elle est minorée par son premier terme U_0 :
$$U_0 \leq U_1 \leq U_2 \leq \dots \leq U_n \leq \dots$$
2. Si (U_n) est une suite décroissante, alors elle est majorée par son premier terme U_0 :
$$U_0 \geq U_1 \geq U_2 \geq \dots \geq U_n \geq \dots$$

Exemples :

1. La suite (U_n) définie par $\forall n \in \mathbb{N}, U_n = e^n + 1$ est strictement croissante, elle est minorée par 1 par contre, elle n'est pas majorée.
2. La suite (V_n) définie par $\boxed{\times}$ est strictement décroissante, majorée par -4, par contre elle n'est pas minorée .
3. La suite (W_n) définie par $\forall n \in \mathbb{N}, W_n = \sin n$ est bornée, majorée par 1 et minorée par -1.

Théorème :

1. Une suite croissante et majorée est convergente .
2. Une suite décroissante et minorée est convergente .

Théorème :

1. Toute suite croissante non majorée, diverge vers $+\infty$.
2. Toute suite décroissante non minorée diverge vers $-\infty$.

Exemple :

1. La suite (U_n) définie par $\forall n \in \mathbb{N}, U_n = e^n + 1$ est strictement croissante, elle n'est pas majorée donc diverge vers $+\infty$.
2. La suite (V_n) définie par $\boxed{\times}$ est strictement décroissante, elle n'est pas minorée donc diverge vers $-\infty$.
3. La suite (W_n) définie par $\forall n \in \mathbb{N}, W_n = \sin n$ est bornée, elle est dite divergente.

Théorème :

Soit (U_n) définie par U_0 et $\forall n \in \mathbb{N}, U_n =$.

Si (U_n) converge vers l et si f est continue en l alors cette limite l vérifie $f(l) = l$.

Exemple :

Considérons (U_n) définie par $U_0 =$ et $\forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = \frac{U_n^2}{3}$.

(U_n) est décroissante et minorée par 0 (à montrer...).

Donc (U_n) converge vers l d'après le théorème précédent.

Posons $\forall x \in \mathbb{R}^+, f(x) = \frac{x^2}{3}$

On est amené à résoudre $f(l) = l \iff \frac{l^2}{3} = l \iff l \times (\frac{l}{3} - 1) = 0 \iff l =$

or

$$\forall n \in \mathbb{N}, U_n \leq 2,5$$

donc $l \neq 0$

d'où

$$l = 0 =$$

II . Suites adjacentes :

Définition :

Dire que deux suites (U_n) et (V_n) sont adjacentes signifie que :

1. L'une est croissante.
2. L'autre est décroissante.
3. $\lim_{n \rightarrow +\infty} (U_n - V_n) = 0$.

Exemple :

Considérons les deux suites numériques suivantes :

$$\forall n \geq 1, U_n =$$

$$\forall n \geq 1, U_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^2} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} + \frac{1}{(n+1)^2} = U_n + \frac{1}{(n+1)^2}.$$

$$\text{Donc } U_{n+1} - U_n = \frac{1}{n+1^2} > 0$$

donc (U_n) est croissante .

$$\forall n \geq 1, V_{n+1} - V_n = U_{n+1} + \frac{1}{n+1} - U_n - \frac{1}{n} = U_{n+1} - U_n - \frac{1}{n(n+1)}.$$

$$\forall n \geq 1, V_{n+1} - V_n = U_{n+1} + \frac{1}{n+1} - U_n - \frac{1}{n} = \frac{1}{n+1^2} - \frac{1}{n(n+1)}$$

$$\forall n \geq 1, V_{n+1} - V_n = U_{n+1} + \frac{1}{n+1} - U_n - \frac{1}{n} = \frac{n}{n(n+1)^2} - \frac{n+1}{n(n+1)^2}$$

$$\forall n \geq 1, V_{n+1} - V_n = U_{n+1} + \frac{1}{n+1} - U_n - \frac{1}{n} = -\frac{1}{n(n+1)^2} < 0$$

donc (V_n) est décroissante .

$$V_n - U_n = \frac{1}{n}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (V_n - U_n) = 0$$

Conclusion :

Les deux suites (U_n) et (V_n) sont adjacentes .

Définition :

Si **deux suites sont adjacentes** alors elles **convergent** vers la même **limite**.

Exemple :

Reprenons notre exemple précédente :

$$\forall n \geq 1, U_n =$$

Les deux suites (U_n) et (V_n) sont adjacentes donc elles sont convergentes et convergent vers la même limite .

Nous pourrions montrer que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (V_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} (U_n) = \frac{\pi^2}{6}$$