

Académie d'enseignement de Bamako – R.D.

Lycée La lanterne de Sogoniko

| <b>DEVOIR DE MATHÉMATIQUES</b> |             |                         |                  |
|--------------------------------|-------------|-------------------------|------------------|
| Classe : <b>TSE</b>            | 2013 - 2014 | Durée : <b>3 heures</b> | Coef : <b>05</b> |

**Exercice1 :** -----[5 points]

1) Déterminer une primitive de  $f$  dans chacun des cas suivants :

a)  $f(x) = 3x^2 - x + 1$  (0,5 pt)

b)  $f(x) = x^3(x^4 - 5)^2$  (0,5 pt)

c)  $f(x) = \frac{2x - 1}{\sqrt{x^2 - x + 3}}$  (0,5 pt)

d)  $f(x) = \frac{x}{\left(\frac{1}{2}x^2 + 5\right)^4}$  (0,5 pt)

2) Soit  $f(x) = \frac{3x^3 - 7x^2 + 5x + 1}{(x - 1)^2}$ .

a) Déterminer l'ensemble de définition  $D_f$  de  $f$ . (0,75 pt)

b) Déterminer les réels  $a$ ,  $b$  et  $c$  tels que :  $\forall x \in D_f; f(x) = ax + b + \frac{c}{(x-1)^2}$ . (1,5 pts)

c) En déduire la primitive de  $f$  qui s'annule en 0. (0,75 pt)

**Exercice2 :** -----[5 points]

1) Calculer les intégrales suivantes :

$I = \int_0^1 (x^4 - 2x^3 + x) dx$  (0,5 pt)

$J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x - \cos x}{(\cos x + \sin x)^2} dx$  (0,5 pt)

$K = \int_3^8 \frac{dx}{\sqrt{1+x}}$  (0,5 pt)

$L = \int_0^1 (x^2 - 1)(x^3 - 3x + 1)^3 dx$  (0,5 pt)

2) Calculer à l'aide d'un changement de variable les intégrales suivantes :

$I_1 = \int_0^3 \frac{x}{\sqrt{x+1}} dx$  (0,75 pt)

$I_2 = \int_{\frac{5}{3}}^2 \frac{x^2}{(3x-4)^5} dx$  (0,75 pt)

3) Calculer à l'aide de la technique d'intégration par parties les intégrales suivantes :

$J_1 = \int_0^{\frac{\pi}{6}} x \sin 2x dx$  (0,75 pt)

$J_2 = \int_1^2 x \sqrt{-x+3} dx$  (0,75 pt)

**Problème : -----[10 points]**

**I.** On considère la fonction  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \rightarrow -x + \sqrt{x^2 + x - 2}.$$

On désigne par  $(\mathcal{C})$  la courbe représentative de  $f$  dans le plan muni d'un repère orthonormé  $(o; \vec{i}; \vec{j})$ .

- 1) a) Déterminer le domaine de définition  $D_f$  de  $f$ . (0, 25 pt)  
b) Etudier la dérivabilité de  $f$  au points  $x_0 = -2$  et  $x_1 = 1$ . (0, 5 pt)  
c) Etudier les variations de  $f$  puis dresser son tableau de variation. (1, 5 pts)
- 2) Déterminer l'abscisse du point d'intersection de  $(\mathcal{C})$  avec l'axe  $(o; \vec{i})$ . (0, 25 pt)
- 3) Préciser les asymptotes à  $(\mathcal{C})$  puis tracer  $(\mathcal{C})$ . (2 pts)
- 4) Soit  $h$  la restriction de  $f$  à l'intervalle  $]-\infty; -2]$ .
  - a) Montrer que  $h$  est une bijection de  $]-\infty; -2]$  vers un intervalle  $J$  à préciser. (0, 5 pt)
  - b) Soit  $h^{-1}$  la réciproque de  $h$ . Calculer  $h^{-1}(5)$  et  $(h^{-1})'(5)$ . (0, 5 pt)
  - c) Pour tout  $x$  de  $J$ , exprimer  $h^{-1}(x)$ . (0, 5 pt)
  - d) Construire sur le même graphique que  $(\mathcal{C})$  la courbe  $(\Gamma)$  de  $h^{-1}$ . (0, 5 pt)

**II.** Soit la fonction  $g(x) = x^3 - 3x - 18$ .

- 1) Etudier les variations de  $g$ . (1 pt)
- 2) Montrer que l'équation  $g(x) = 0$  admet dans  $\mathbb{R}$  une solution unique. (0, 5 pt)
- 3) Calculer  $g(3)$ . En déduire le signe de  $g(x)$  suivants les valeurs de  $x$ . (0, 5 pt)

**III.** Soit  $\varphi(x) = \sqrt{1+x^2}$ .

- 1) Calculer  $\varphi'(x)$  et  $\varphi''(x)$ . (0, 5 pt)
- 2) Montrer que  $\forall x \in [1; 2], \frac{1}{\sqrt{2}} \leq \varphi'(x) \leq \frac{2}{\sqrt{5}}$ . (0, 5 pt)
- 3) En utilisant les inégalités des accroissements finis, montrer que :

$$\forall x \in [1; 2]; \quad \frac{x+1}{\sqrt{2}} \leq \sqrt{1+x^2} \leq \frac{2x-2+\sqrt{10}}{\sqrt{5}}. \quad (0, 5 \text{ pt})$$

**N.B :** Les parties **I**, **II** et **III** du problème sont indépendantes.

