

DEVOIR DE MATHEMATIQUES	ANNEE SCOLAIRE : 2013-2014
SERIE : TSE	DUREE : 3 H

EXERCICE 1 :

1°/ Calculer les intégrales suivantes : $A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sqrt{1+\sin x}} dx$; $B = \int_{-2}^2 \frac{x^3 - 4x + 5}{x+3} dx$ et $C = \int_0^{\pi} \cos^3 x \, dx$

2°/ a) Déterminer les nombres réels a et b tels que : $\forall x \in \mathbb{R} - \{-1; 0\}, \frac{1}{x(x+1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1}$

b) Calculer $I = \int_1^2 \frac{1}{x(x+1)} dx$

c) Calculer l'intégrale $K = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan x}{1+\cos x} dx$

3°/ En utilisant un changement de variable affine, calculer $\int_0^5 \frac{x}{\sqrt{3x+1}} dx$

EXERCICE 2 :

1°/ On considère la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par $U_n = \int_0^1 \frac{1}{1+x^n} dx$

a) Calculer U_1

b) Montrer que pour tout nombre réel positif x; $1 - x^n \leq \frac{1}{1+x^n} \leq 1$. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$;

$1 - \frac{1}{n+1} \leq U_n \leq 1$ et déterminer la limite de la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

2°/ Soit la suite $(V_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par $V_n = \int_0^1 \frac{nx^n}{1+x^n} dx$.

a) En écrivant $\frac{nx^n}{1+x^n} = \frac{nx^{n-1}}{1+x^n} \times x$; montrer à l'aide d'une intégration par partie que $V_n = \ln 2 - \int_0^1 \ln(1+x^n) dx$.

b) Sachant que pour tout nombre réel positif t, on a : $0 \leq \ln(1+t) \leq t$; montrer que $0 \leq \int_0^1 \ln(1+x^n) dx \leq \frac{1}{n+1}$.

En déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = \ln 2$

PROBLÈME :

PARTIE A/ On considère la fonction g de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par $g(x) = 2x^2 + 1 - \ln x$

1°/ Étudier les variations de g puis dresser son tableau de variation. (On ne demande pas de calculer les limites)

2°/ En déduire le signe de $g(x)$.

PARTIE B/ Soit la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = 2x - 3 + \frac{\ln x}{x}$. On désigne par $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J) d'unité graphique 2 cm.

1°/ a) Calculer la limite de f en $+\infty$

b) Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ puis interpréter graphiquement le résultat.

2°/ Démontrer que la droite $(\mathcal{D})$ d'équation $y = 2x - 3$ est une asymptote à $(\mathcal{C})$ et préciser la position de $(\mathcal{C})$ par rapport à $(\mathcal{D})$.

3°/ Calculer la dérivée f' de f et vérifier que $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$, en déduire le tableau de variation de f .

4°/ Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α . Justifier que $1,3 \leq \alpha \leq 1,4$.

5°/ Tracer la droite $(\mathcal{D})$ et la courbe $(\mathcal{C})$.

6°/ Calculer l'aire $\mathcal{A}$ en cm^2 de la partie du plan comprise entre $(\mathcal{C})$, la droite $(\mathcal{D})$ et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$.