

DEVOIR DE MATHEMATIQUES	ANNEE SCOLAIRE : 2014-2015
SERIE : TSE	DUREE : 3 H

EXERCICE 1 :

1°/ Calculer les intégrales suivantes : $A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sqrt{1 + \sin x}} dx$; $B = \int_{-2}^2 \frac{x^2 - 4x + 5}{x + 3} dx$ et $C = \int_0^{\pi} \cos^3 x \, dx$

2°/ En utilisant un changement de variable affine, calculer $\int_0^5 \frac{x}{\sqrt{3x+1}} dx$.

3°/ Soit f la fonction définie sur l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ par $f(x) = \frac{1}{1 - \sin x}$

a) Exprimer à l'aide d'une intégrale la primitive F de la fonction f qui s'annule en 0.

b) Déterminer cette primitive. (On pourra remarquer que : $\frac{1}{1 - \sin x} = \frac{1 + \sin x}{(1 - \sin x)(1 + \sin x)}$).

EXERCICE 2 :

On considère la fonction numérique φ définie sur $[1; +\infty[$ par $\varphi(x) = \int_1^x \frac{\ln t}{(1+t)^3} dt$

1°/ Justifier l'existence de φ .

2°/ Déterminer les nombres réels a , b et c tels que : $\forall t \in [1; +\infty[; \frac{1}{t(1+t)^2} = \frac{a}{t} + \frac{b}{1+t} + \frac{c}{(1+t)^2}$. En

déduire le calcul de $\int_1^x \frac{dt}{t(1+t)^2}$ pour tout $x \geq 1$.

3°/ a) En utilisant une intégration par parties, calculer $\varphi(x)$

b) Calculer la limite de φ en $+\infty$

PROBLÈME :

PARTIE A/ On considère la fonction g définie sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = x^2 + \ln x$

1°/ Etudier les variations de g .

2°/ Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α et que $0,65 \leq \alpha \leq 0,66$.

3°/ Préciser le signe de $g(x)$ selon les valeurs de x .

PARTIE B/ Soit la fonction numérique de variable réelle x définie par $f(x) = 1 - x + \frac{1 + \ln x}{x}$ de courbe représentative $(\mathcal{C})$ dans un repère orthonormé d'unité graphique 4 cm.

1°/ a) Déterminer l'ensemble de définition D_f de f .

b) Calculer les limites de f aux bornes de D_f puis interpréter graphiquement.

2°/ a) Montrer que $(\mathcal{C})$ admet une droite asymptote (D) en $+\infty$ que l'on précisera.

b) Etudier la position relative de $(\mathcal{C})$ par rapport à (D)

3°/ Etudier le sens de variation de f puis dresser son tableau de variation.

4°/ Montrer que $f(\alpha) = 1 - 2\alpha + \frac{1}{\alpha}$

5°/ Montrer qu'il existe un point A de $(\mathcal{C})$ dont précisera les coordonnées où la tangente (T) est parallèle à (D) .

6°/ Construire (D) ; (T) et $(\mathcal{C})$.