

DEVOIR DE MATHÉMATIQUES	ANNEE SCOLAIRE : 2014-2015
SERIE : TSE	DUREE : 3 H

EXERCICE 1 :

Soit n un entier naturel. On pose $a = 2n+8$ et $b = 3n+15$ et on désigne par d le PGCD de a et b .

1°/ Montrer que pour tout n entier naturel, d divise 6.

2°/ Déterminer l'ensemble S des entiers naturels n tels que $d = 6$.

EXERCICE 2:

1°/ Si l'on divise 644 et 1095 par un même nombre, on obtient respectivement 15 et 22 comme reste. Quel est ce nombre ?

2°/ a) L'entier naturel 943 est-il premier ?

b) Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation : $x^2 = y^2 + 943$

PROBLEME:

PARTIE A

Soit l'application f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = x + 3 + \sqrt{x^2 + 1}$ et $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J) .

1°/ Déterminer la limite de f en $-\infty$. Quelle en est la conséquence graphique ?

2°/ Démontrer que la droite $(\mathcal{D})$ d'équation $y = 2x + 3$ est asymptote à $(\mathcal{C})$ en $+\infty$.

3°/ Etudier les variations de la fonction f et dresser son tableau de variation.

4°/ a) Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers un intervalle K à préciser. Soit f^{-1} la bijection réciproque de f .

b) Calculer $f^{-1}(4)$ et $(f^{-1})'(4)$

5°/ Construire $(\mathcal{C})$ et la courbe $(\mathcal{C}')$ de f^{-1} dans le repère (O, I, J)

PARTIE B

Soit la fonction h définie sur $\left[-\frac{1}{2}; 1\right]$ par $h(x) = \sqrt{x+1}$

1°/ Montrer que la fonction dérivée h' de h est strictement décroissante sur $\left[-\frac{1}{2}; 1\right]$

2°/ Soit a un nombre réel de l'intervalle $[0; 1]$.

a) Vérifier que pour tout élément x de $[0; a]$, on a : $\frac{1}{2\sqrt{1+a}} \leq h'(x) \leq \frac{1}{2}$.

b) En appliquant les inégalités des accroissements finis à h sur l'intervalle $[0; a]$, montrer que :

$$1 + \frac{a}{2\sqrt{1+a}} \leq \sqrt{1+a} \leq 1 + \frac{a}{2}.$$

