

CALCUL DANS $\mathbb{C}$

➔ **EXERCICE 1** Répondre par vrai ou faux en justifiant sachant que dans chacune des questions suivantes une ou plusieurs réponses proposées sont vraies

1) $\overline{2i+3} = 3-2i$ ☐ $\overline{2i+3} = 2i-3$ ☐
 $\overline{2i+3} = \overline{2i}+\overline{3}$ ☐ $\overline{2i+3} = 2i+3$ ☐

2) Si Z est un nombre complexe alors :
 $\overline{Z+2i} = Z-2i$ ☐ $\overline{Z+2i} = \overline{Z}+2i$ ☐
 $\overline{Z+2i} = Z+2i$ ☐ $\overline{Z+2i} = \overline{Z}-2i$ ☐

3) On considère un nombre complexe $Z = x + iy$ où x et y sont deux réels. Si $Z^2 \in \mathbb{R}$ alors :
 Z est réel ☐ Z est imaginaire ☐
 $xy = 0$ ☐ $(\overline{Z}-Z)(\overline{Z}+Z) = 0$ ☐

4) On considère un nombre complexe $Z = x + iy$ où x et y sont deux réels. Si Z^2 est imaginaire alors :
 Z est réel ☐ Z est imaginaire ☐
 $|x| = |y|$ ☐ $(Z-i\overline{Z})(Z+i\overline{Z}) = 0$ ☐

➔ **EXERCICE 2** Le plan complexe $\mathcal{P}$ est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. Pour chacune des questions suivantes, écrire le numéro et la lettre de l'unique réponse exacte puis justifier

1) On considère les points A, B, C distincts deux à deux d'affixes respectives a, b et c tels que $(a-c)+i(a-b)=0$. Alors le triangle ABC est :

- a) Équilatéral
 b) Isocèle, rectangle de sens direct
 c) Isocèle, rectangle de sens indirect

2) Soit la rotation $\mathcal{R}$ du plan $\mathcal{P}$ qui transforme tout point M d'affixe Z au point M' d'affixe Z' tel que :

$Z'-2 = -ie^{i\frac{\pi}{6}}(Z-2)$. L'angle de $\mathcal{R}$ est :
 a) $\frac{\pi}{6}$ b) $\frac{\pi}{3}$ c) $-\frac{\pi}{3}$

3) On considère les points M et M' d'affixes respectives Z et $Z' = Z - i\overline{Z}$. L'ensemble (E) des points M tels que $M' = O$ est :

- a) Une droite b) un cercle c) un singleton

➔ **EXERCICE 3**

Cocher la case de l'unique bonne réponse puis justifier :

1) Si Z est un nombre complexe différent de 1 alors le conjugué de $\frac{1-Z^2}{Z-1}$ est :

$\frac{1-Z^2}{Z+1}$ ☐ $\frac{1-\overline{Z}^2}{Z-1}$ ☐ $\frac{-i+\overline{Z}^2}{Z-1}$ ☐

2) Si Z est un complexe d'argument $-\frac{\pi}{3}$ alors un argument de $-i\overline{Z}$ est :

$-\frac{5\pi}{6}$ ☐ $-\frac{\pi}{6}$ ☐ $\frac{\pi}{6}$ ☐ $\frac{\pi}{3}$ ☐

3) La forme exponentielle du complexe $U = 2i - 2e^{i\frac{\pi}{6}}$ est :

$2e^{i\frac{\pi}{6}}$ ☐ $2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{6}}$ ☐ $2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{3}}$ ☐

4) Si Z est un complexe non nul et $Z - i\overline{Z} = 0$ alors :

$\arg(Z) = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ ☐

$\arg(Z) = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ ☐

$\arg(Z) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ ☐

➔ **EXERCICE 4** Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On considère trois points A, B, C distincts deux à deux d'affixes respectives a, b, c .

Pour chacune des questions suivantes, écrire le numéro et la lettre de l'unique vraie réponse puis justifier

1) Si $\frac{c-a}{b-a} = e^{i\frac{\pi}{3}}$ alors :

- a) A, B et C sont alignés
 b) Le triangle ABC est équilatéral direct
 c) Le triangle ABC est équilatéral indirect

2) Si $\frac{c-a}{b-a} \in \mathbb{R}^*$ alors :

- a) $A \in [BC]$ b) $B \in [AC]$ c) $C \in [AB]$

3) Si $\frac{c-a}{b-a} \in i\mathbb{R}$ alors :

- a) A, B et C sont alignés
 b) Le triangle ABC est rectangle en B
 c) A appartient au cercle de diamètre $[BC]$

➔ **EXERCICE 5** S et P : désignent respectivement la somme et le produit des racines de l'équation $(E) : (1+i)Z^2 - (6+2i)Z + 4-2i = 0$

Pour chacune des questions suivantes, écrire le numéro et la lettre de l'unique vraie réponse puis justifier

1) La somme des racines de (E) est :

- a) $S = 1+i$ b) $S = 4-2i$ c) $S = 6+2i$

2) Le produit des racines de (E) est :

- a) $P = 1-3i$ b) $P = 4-2i$ c) $P = 4+2i$

3) Z_1 et Z_2 : désignent les racines de (E) . La forme algébrique du complexe $V = Z_1^2 + Z_2^2 - Z_1Z_2$ est :

- a) $-9+7i$ b) $9+7i$ c) $9-7i$

➔ **EXERCICE 6** On considère les nombres complexes $Z = 1+i\sqrt{3}$ et $Z' = \sqrt{2}+i\sqrt{2}$

1) Déterminer les formes trigonométriques de Z et Z'

2) Déterminer la forme trigonométrique et algébrique du nombre complexe $U = ZZ'$. En déduire les valeurs exactes de $\cos(\frac{7\pi}{12})$ et $\sin(\frac{7\pi}{12})$

3) Déterminer la forme trigonométrique et algébrique du nombre complexe $V = \frac{Z}{Z'}$. En déduire les valeurs exactes de $\cos(\frac{\pi}{12})$ et $\sin(\frac{\pi}{12})$

4) Déterminer les réels α et β tels que $\begin{cases} \alpha + \beta = \frac{\pi}{3} \\ \alpha - \beta = \frac{\pi}{4} \end{cases}$ puis déterminer la forme exponentielle du nombre complexe

$W = Z + Z'$. En déduire les valeurs exactes de $\cos(\frac{\pi}{24})\cos(\frac{7\pi}{24})$, $\cos(\frac{\pi}{24})\sin(\frac{7\pi}{24})$ et $\tan(\frac{7\pi}{24})$

EXERCICE 7 On considère les complexes : $Z = (1+i)^{2n}$ et $U = (1+i)^{2n} + (1-i)^{2n}$ où $n \in \mathbb{N}$

1) Montre que $U = 2\operatorname{Re}(Z)$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $Z = 2^n \times i^n$

2) Montrer que :

- a) Si $n = 4p$ alors $Z = 2^n$ et $U = 2^{n+1}$
 b) Si $n = 4p+1$ alors $Z = 2^n \times i$ et $U = 0$
 c) Si $n = 4p+2$ alors $Z = -2^n$ et $U = -2^{n+1}$
 d) Si $n = 4p+3$ alors $Z = -2^n \times i$ et $U = 0$

3) On suppose que $n = 4p$

a) Montrer que $U = 2 \sum_{k=0}^n (-1)^k C_{2n}^{2k}$

b) En déduire que $\sum_{k=0}^n (-1)^k C_{2n}^{2k} = 2^n$

EXERCICE 8

Soit un complexe Z de module 1 et d'argument α appartenant à l'intervalle $]-\pi, \pi[$

1) Montrer que : $1+Z = 2\cos(\frac{\alpha}{2})e^{i\frac{\alpha}{2}}$ et $1+Z^2 = (2\cos\alpha)Z$

1) Etudier le signe de $1+2\cos\alpha$ lorsque α varie dans l'intervalle $]-\pi, \pi[$ puis déterminer en fonction de α le module et un argument de chacun des complexes $U = 1+Z+Z^2$ et $V = Z+Z^2+Z^3$

2) Déterminer en fonction de α le module et un argument du complexe $W = 1+Z+Z^2+Z^3$

EXERCICE 9 Déterminer la forme exponentielle du complexe $Z = -\sin\alpha + i\cos\alpha$. En déduire la forme exponentielle des complexes $U = \sin\alpha - i\cos\alpha$, $V = -\sin\alpha - i\cos\alpha$ et $W = \sin\alpha + i\cos\alpha$

EXERCICE 10 Déterminer la forme exponentielle puis le module et argument du complexe Z dans chacun des cas suivants :

- 1) $Z = 1 + i\tan\alpha$ où $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}[\cup]\frac{\pi}{2}, \pi]$
 2) $Z = \frac{(\cos\alpha + i\sin\alpha)^3}{(\cos\alpha - i\sin\alpha)^2}$ où $\alpha \in \mathbb{R}$
 3) $Z = 1 + \sin\alpha - i\cos\alpha$ où $\alpha \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[$
 4) $Z = \frac{1 - \cos\alpha + i\sin\alpha}{1 - \cos\alpha - i\sin\alpha}$ où $\alpha \in]0, \pi[$

EXERCICE 11 Z_1 et Z_2 sont deux complexes non nuls tels que $|Z_1| = |Z_2| = r$ et $Z_1 Z_2 + r^2 \neq 0$. Montrer que le complexe $U = \frac{Z_1 + Z_2}{r^2 + Z_1 Z_2}$ est réel

EXERCICE 12

Z étant un nombre complexe. Montrer que les deux conditions suivantes sont équivalentes : $C_1 : Z \neq -1$ et $|Z| = 1$
 $C_2 : \exists$ un réel x tel que : $Z = \frac{1+ix}{1-ix}$

EXERCICE 13

Soient a , b et c trois nombres complexes non nuls tels que : $|a| = |b| = |c| = r$ et $a + b + c \neq 0$. Montrer que : $|\frac{ab+bc+ca}{a+b+c}| = r$

EXERCICE 14

1) Montrer que quels que soient les complexes α et β , on a : $|\alpha + \beta|^2 + |\alpha - \beta|^2 = 2|\alpha|^2 + 2|\beta|^2$

2) On considère trois nombres complexes Z , Z' et U tels que : $Z \times Z' = U^2$

On pose : $A = \frac{Z+Z'}{2}$ et $B = \frac{Z-Z'}{2}$

a) Vérifier que : $A+B=Z$, $A-B=Z'$ et $A^2 - U^2 = B^2$

b) Montrer que : $|\frac{Z+Z'}{2} + U| + |\frac{Z-Z'}{2} - U| = |Z| + |Z'|$

EXERCICE 15

a et b sont deux réels appartenant à l'intervalle $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

1) Déterminer les réels α et β tels que $\begin{cases} \alpha + \beta = a \\ \alpha - \beta = b \end{cases}$

2) Déterminer la forme exponentielle du complexe : $U = e^{ia} + e^{ib}$

3) Montrer que $\tan(\frac{a+b}{2}) = \frac{\sin a + \sin b}{\cos a + \cos b}$ puis calculer : $\tan \frac{\pi}{8}$, $\tan \frac{\pi}{12}$ et $\tan \frac{\pi}{24}$

4) Déterminer la forme exponentielle des complexes :

$$V = 1 + e^{ia} \quad \text{et} \quad W = \frac{1 - e^{ia}}{1 + e^{ia}} \quad \text{lorsque } a \neq 0$$

EXERCICE 16

On considère un entier naturel n supérieur ou égal à 2, et on pose : $Z = \cos \frac{\pi}{n} + i \sin \frac{\pi}{n}$

$$T = 1 + Z + Z^2 + \dots + Z^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} Z^k$$

$$S_n = \sin \frac{\pi}{n} + \sin \frac{2\pi}{n} + \dots + \sin \frac{(n-1)\pi}{n} = \sum_{k=1}^{n-1} \sin \frac{k\pi}{n}$$

1) Exprimer le complexe $T - ZT$ en fonction de Z et n . En déduire que : $T = \frac{2}{1-Z}$

2) Montrer que : $T = 1 + \frac{1}{\tan \frac{\pi}{2n}}$ en déduire que $S_n = \frac{1}{\tan \frac{\pi}{2n}}$ puis

$$\text{calculer } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{S_n}{n}$$

NOMBRES COMPLEXES ET GEOMETRIE DU PLAN

EXERCICE 17

Le plan $\mathcal{P}$ est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Soient les points A , B , D d'abscisses respectives $Z_A = 2i$, $Z_B = 2$ et $Z_D = 2 + 4i$

1) Déterminer la mesure principale en radian de chacun des angles $(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB})$, $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$ et $(\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{AB})$

2) Soit M un point variable d'abscisse Z . Déterminer et construire chacun des ensembles suivants :

$$(E_1) = \left\{ M \in \mathcal{P} \mid \arg\left(\frac{2-Z}{2-\bar{Z}}\right) = \frac{\pi}{4} (2\pi) \right\}$$

$$(E_2) = \left\{ M \in \mathcal{P} \mid \arg\left(\frac{2-Z}{2-\bar{Z}}\right) = -\frac{3\pi}{4} (2\pi) \right\}$$

$$(E) = \left\{ M \in \mathcal{P} \mid \arg\left(\frac{2-Z}{2-\bar{Z}}\right) = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

EXERCICE 18

Dans le plan complexe $\mathcal{P}$ rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère les points A , B et M d'affixes respectives $Z_A = 2 - 2i$, $Z_B = -4i$ et $Z = x + iy$. Soit l'application $g : M(Z) \rightarrow M'(Z') \mid Z' = (1-i)\bar{Z} + 4i$.

- 1) Déterminer l'affixe du point A' l'image de A et l'affixe du point B' l'antécédent de B par l'application g . En déduire que $(g \circ g)(A) = B$.
- 2) Montrer que l'application g possède un seul point invariant Ω dont on précisera les coordonnées.
- 3) Montrer que $g \circ g$ est l'homothétie de centre Ω et de rapport 2.

- 4) Montrer que pour tout point M du plan $\mathcal{P}$ on a :

$\Omega M' = \sqrt{2} \Omega M$. En déduire l'image du cercle $\mathcal{C}$ de centre Ω et de rayon R par l'application g .

- 5) Déterminer les affixes des vecteurs $\overrightarrow{\Omega M}$ et $\overrightarrow{\Omega M'}$ puis exprimer leurs composantes en fonction de x et y .

- 6) Montrer que $\overrightarrow{\Omega M} \cdot \overrightarrow{\Omega M'} = (x - (y+4))^2 - 2y^2$. En déduire que l'ensemble (E) des points M tels que $\overrightarrow{\Omega M} \perp \overrightarrow{\Omega M'}$ est la réunion de deux droites perpendiculaires dont on déterminera les équations.

- 7) Montrer que $\det(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) = (y + (4-x))^2 - 2(4-x)^2$. En déduire que l'ensemble (E') des points M tels que Ω, M et M' soient alignés est la réunion de deux droites perpendiculaires dont on déterminera les équations.

EXERCICE 19

Le plan complexe $\mathcal{P}$ est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On note par A le point d'affixe 1. On considère l'application f de $\mathcal{P} \setminus \{A\}$ dans $\mathcal{P}$, qui associe à tout point M d'affixe Z le point M' d'affixe $Z' = \frac{\bar{Z}}{Z-1}$.

- I) On pose $Z = x + iy$ où $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

- 1) Montrer que l'ensemble des points invariants par f est un cercle dont on précisera le centre et le rayon.

- 2) Déterminer la forme algébrique de Z' en fonction de x et y .

- 3) Déterminer les ensembles : $E_1 = \{M \in \mathcal{P} \mid M' \in (O, \vec{u})\}$

$$E_2 = \{M \in \mathcal{P} \mid M' \in (O, \vec{v})\}, E_3 = \{M \in \mathcal{P} \mid OM' = 1\}$$

- II) Pour tout nombre complexe $Z \neq 1$, on pose :

$$|Z-1| = r \text{ et } \arg(Z-1) = \alpha (2\pi)$$

- 1) Montrer que $Z'-1 = \frac{1}{Z-1}$ en déduire la forme exponentielle de $Z'-1$.

- 2) Montrer que les points : A, M, M' sont alignés et que $AM \cdot AM' = 1$.

- 3) Montrer l'équivalence : $|Z+1| = 2 \Leftrightarrow |Z'-\frac{1}{2}| = |Z'-1|$. En déduire l'image par f du cercle $\mathcal{C}$ de centre Ω d'affixe -1 et de rayon 2. Donner une construction simple du point M' l'image par f d'un point M quelconque du cercle $\mathcal{C}$.

EXERCICE 20

Le plan complexe $\mathcal{P}$ est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On considère trois points A, B, C distincts deux à deux, d'affixes respectives : a, b, c . Soit l'application $\mathcal{R}$ de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$ qui à tout point M d'affixe Z associe le point M' d'affixe : $Z' = \alpha Z + \beta$ où α et β sont deux nombres complexes.

- 1) Déterminer α pour que $\mathcal{R}$ soit une rotation d'angle $\frac{\pi}{3}$ puis vérifier que $\alpha + \frac{1}{\alpha} = 1$.

- 2) Exprimer β en fonction de a et α pour que A soit le centre de la rotation $\mathcal{R}$.

- 3) Montrer l'équivalence : $\mathcal{R}(B) = C \Leftrightarrow \frac{c-a}{b-a} - \alpha = 0$.

- 4) Montrer l'équivalence : $\mathcal{R}(C) = B \Leftrightarrow \frac{c-a}{b-a} - \frac{1}{\alpha} = 0$.

- 5) Montrer que le triangle ABC est équilatéral, si et seulement si : $a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca = 0$.

EXERCICE 21

Le plan complexe $\mathcal{P}$ est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Pour tout nombre complexe $Z \neq -i$, on associe le complexe $U = \frac{iZ+1}{Z+i}$. On considère les points A, B, M et N d'affixes respectives : $i, -i, Z$ et U .

- 1) On pose $Z = x + iy$ avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Déterminer la forme algébrique de U en fonction de x et y . En déduire chacun des ensembles suivants : $\Sigma_1 = \{M \in \mathcal{P} \mid U \in \mathbb{R}\}$ et $\Sigma_2 = \{M \in \mathcal{P} \mid U \in i\mathbb{R}\}$.

- 2) Montrer que si $M \neq B$ alors $|U| = \frac{MA}{MB}$. En déduire que si M varie sur l'axe des réels alors N varie sur un cercle $\mathcal{C}$ dont on précisera le centre et le rayon.

- 3) Montrer l'équivalence : $|U| = 2 \Leftrightarrow (Z + \frac{5}{3})(\bar{Z} - \frac{5}{3}) = \frac{16}{9}$.

En déduire l'ensemble $\Sigma_3 = \{M \in \mathcal{P} \mid |U| = 2\}$.

- 4) On suppose que $M \neq A$ et $M \neq B$.

- a) Montrer la relation : $(\vec{i}, \overrightarrow{ON}) = \frac{\pi}{2} + (\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MA}) (2\pi)$.

- b) Déterminer l'ensemble Γ_1 des points N lorsque M décrit le segment $[AB]$ privé de A et B .

- c) Déterminer l'ensemble Γ_2 des points N lorsque M décrit la droite (AB) privée du segment $[AB]$.

- 5) Soit C le point d'affixe $-2 + i$.

- a) Déterminer une mesure de l'angle $(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA})$.

- b) Déterminer l'ensemble $\Sigma = \{M \in \mathcal{P} \mid \arg(U) = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

- 6) Montrer que $\forall Z \neq -i, (U-i)(U+i) = 2$. En déduire que lorsque M décrit le cercle $\mathcal{C}_r$ de centre B et de rayon r , alors N décrit un cercle $\mathcal{C}'$ dont on précisera le centre et le rayon.

⇒ EXERCICE 22

Le plan $\mathcal{P}$ est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On considère les points A, B, C d'affixes respectives $Z_A = a$, $Z_B = b$ et $Z_C = c = (1-u)a + ub$ où $u = \frac{1+j}{2}$ et $a \neq b$.

- Déterminer le module et un argument du complexe u .
- Calculer $\frac{c-a}{b-a}$. En déduire que C est l'image de B par une rotation de centre A dont on précisera l'angle.
- On considère les points D d'affixe $Z_D = 2a - b$. Montrer que les points B, C, D appartiennent à un cercle (E) dont on précisera le centre et le rayon. En déduire la mesure principale de l'angle $(\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{DC})$.
- Montrer que $(\widehat{DB}, \widehat{DC}) = \arg(1+u) \pmod{2\pi}$. En déduire les valeurs exactes de $\cos(\frac{\pi}{8})$, $\sin(\frac{\pi}{8})$ puis celle de $\tan(\frac{\pi}{8})$.

⇒ EXERCICE 23 Le plan $\mathcal{P}$ est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Soient les points A, B, C d'affixes respectives $Z_A = a$, $Z_B = b$ et $Z_C = c$.

- Montrer que le triangle ABC est isocèle rectangle en A, si et seulement si : $2a^2 + b^2 + c^2 = 2a(b+c)$.
- On suppose $b = 2a$ et que le triangle ABC est isocèle rectangle en A. Déterminer en fonction de a les affixes possibles du point C.

⇒ EXERCICE 24

On pose : $j = e^{\frac{2\pi i}{3}}$ et $S = 1 + j + j^2$.

- Calculer j^3 et $S - jS$. En déduire que : $1 + j + j^2 = 0$.
- Montrer que $e^{\frac{\pi i}{3}} = -j^2$ et $e^{-\frac{\pi i}{3}} = -j$.
- Le plan $\mathcal{P}$ est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Soient les points A, B, C d'affixes respectives $Z_A = a$, $Z_B = b$ et $Z_C = c$. Montrer que le triangle ABC est équilatéral, si et seulement si : $a - b = -j^2(c - b)$ ou $a - b = -j(c - b)$.
- Montrer que le triangle ABC est équilatéral, si et seulement si : $a + b\omega + c\omega^2 = 0$ avec $\omega = j$ ou $\omega = j^2$.

⇒ EXERCICE 25

Le plan $\mathcal{P}$ est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Soient les points A, B, C d'affixes respectives $Z_A = a$, $Z_B = b$ et $Z_C = c$. On pose $u = \frac{c-b}{b-a}$.

- Montrer que les trois conditions suivantes sont logiquement équivalentes :
 - C_1 : ABC est équilatéral
 - C_2 : $u^2 - u + 1 = 0$
 - C_3 : $a^2 + b^2 + c^2 = ab + ac + bc$
- On suppose $b = ia$ et que le triangle ABC est équilatéral. Déterminer en fonction de a les affixes possibles du point C.

EQUATIONS DANS $\mathbb{C}$

⇒ EXERCICE 26

On considère les complexes $u = e^{\frac{2\pi i}{5}}$, $v = e^{\frac{4\pi i}{5}}$ et $S = 1 + u + u^2 + u^3 + u^4$.

- Calculer u^5 puis $S - uS$. En déduire que $S = 0$.
- On pose $Z_1 = u + \bar{u}$ et $Z_2 = v + \bar{v}$. Montrer que : $Z_1 + Z_2 = Z_1 Z_2 = -1$. En déduire que Z_1 et Z_2 sont les racines de l'équation $Z^2 + Z - 1 = 0$.
- Résoudre l'équation $Z^2 + Z - 1 = 0$. En déduire les valeurs exactes de $\cos(\frac{2\pi}{5})$ et $\cos(\frac{4\pi}{5})$.

⇒ EXERCICE 27

Soit le polynôme $P(Z) = Z^4 + 1$.

- Montrer l'équivalence : $P(Z) = 0 \Leftrightarrow P(\bar{Z}) = 0$.
- Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(Z) = 0$ puis utiliser les racines pour exprimer $P(Z)$ en produit de facteurs.
- Exprimer par deux méthodes le polynôme $P(Z)$ en produit de trinômes du second degré à coefficients réels. En déduire les valeurs exactes de $\cos(\frac{\pi}{8})$, $\cos(\frac{3\pi}{8})$, $\cos(\frac{5\pi}{8})$ et $\cos(\frac{7\pi}{8})$.

⇒ EXERCICE 28

- Déterminer dans $\mathbb{C}$ les racines carrées de chacun des complexes : $a = 2i$, $b = -4$, $c = 3 + 4i$, $d = 5 - 12i$, $e = \frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3})$.
- Montrer que si Z est une racine carrée d'un complexe V alors : iZ est une racine carrée de $-V$ et $\bar{Z}$ est une racine carrée de $\bar{V}$.
- Déduire les racines carrées de : $\bar{d} = 5 + 12i$ et $-d = -5 + 12i$.

⇒ EXERCICE 29 Résoudre dans $\mathbb{C}$ chacune des équations suivantes :

- | | |
|--|--------------------------------------|
| (1) $2Z^2 + 2Z + 1 = 0$ | (5) $Z^4 - (3 + 2i)Z^2 + 8 - 6i = 0$ |
| (2) $Z^2 + (3 - 2i)Z + 5 - 5i = 0$ | (4) $(Z + 1)^2 + 4 = 0$ |
| (3) $2Z^2 - (1 + 4i)Z - 1 + 4i = 0$ | |
| (6) $Z^2 - (3\cos \alpha + i \sin \alpha)Z + 2 = 0$ où $\alpha \in \mathbb{R}$ | |

⇒ EXERCICE 30

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $Z^2 - (1 + i(2 + \sqrt{3}))Z + 2(1 - \sqrt{3}) = 0$.

- Montrer que l'équation (E) admet une solution imaginaire Z' que l'on déterminera. En déduire sa deuxième solution Z'' .
- Déterminer la forme exponentielle de Z' et Z'' puis construire dans un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$ leurs images respectives M' et M'' .
- Construire le point N d'affixe $Z' + Z''$. Montrer que $OM'NM''$ est un losange puis calculer son aire.
- Déterminer les réels x et y tels que : $x + y = \frac{\pi}{2}$ et $x - y = \frac{\pi}{3}$ puis déterminer la forme exponentielle et algébrique du complexe $Z' + Z''$.

5) Dédurre de la question précédente les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$, $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$, $\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)$

⇒ EXERCICE 31

On considère les deux polynômes : $P(Z) = Z^2 - (1+i)Z + 2(1+i)$
et $Q(Z) = Z^2 - (1-i)Z + 2(1-i)$

- 1) Montrer l'équivalence : $P(Z) = 0 \Leftrightarrow Q(\bar{Z}) = 0$
- 2) Déterminer l'ensemble S_1 des racines de l'équation $P(Z) = 0$. En déduire l'ensemble S_2 des racines de l'équation $Q(Z) = 0$

3) Résoudre l'équation (E) : $(Z^2 - Z + 2)^2 + (Z - 2)^2 = 0$

Exprimer ses racines sous la forme exponentielle

Résoudre l'équation (E') : $\left(\frac{Z^4 - Z^2 + 2}{Z^2 - 2}\right)^2 = -1$

⇒ EXERCICE 32

Soit le polynôme :

$$P(Z) = Z^2 - (1 + \tan \alpha)(1+i)Z + i(1 + \tan^2 \alpha) \text{ où : } \alpha \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$$

- 1) Montrer que : $(1+i)^2(1 + \tan \alpha)^2 - 4i(1 + \tan^2 \alpha) = (1-i)^2(1 - \tan \alpha)^2$
- 2) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(Z) = 0$ et déterminer la forme exponentielle de ses solutions
- 3) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(Z^2) = 0$

⇒ EXERCICE 33

- 1) Montrer que : $-2i(1 - 2\cos \alpha \sin \alpha) = (e^{i\alpha} - ie^{-i\alpha})^2$
- 2) Vérifier que $(1+i)(\cos \alpha + \sin \alpha) = e^{i\alpha} + ie^{-i\alpha}$ puis résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) :

$Z^2 - (1+i)(\cos \alpha + \sin \alpha)Z + i = 0$ (Écrire les solutions de (E) sous la forme exponentielle)

3) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E') :

$$Z^4 - (1+i)(\cos \alpha + \sin \alpha)Z^2 + i = 0$$

4) Construire les images des racines de (E') dans un repère orthonormé direct $(O, \vec{U}, \vec{V})$ dans le cas où $\alpha = \frac{2\pi}{3}$

5) Montrer que si $\alpha \neq \frac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, alors les images des racines de (E') sont les sommets d'un rectangle de centre O dont on calculera l'aire $\mathcal{A}(\alpha)$ en fonction de α

6) Déterminer les valeurs de α pour lesquels $\mathcal{A}(\alpha)$ est maximale. Montrer que lorsque $\mathcal{A}(\alpha)$ est maximale, les images des racines de (E') sont les sommets d'un carré puis étudier la réciproque et conclure

⇒ EXERCICE 34

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $Z^2 + (1-3)Z + 4 = 0$.

On notera par Z_1 la solution dont la partie imaginaire est positive et par Z_2 l'autre solution

2) Écrire Z_1 et Z_2 sous la forme exponentielle

3) Soit $U = i\sqrt{2} + Z_1 = i\sqrt{2} + 1 + i$. Utiliser les formules d'Euler pour déterminer la forme exponentielle de U

Remarque que : $\frac{3\pi}{8} + \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{2}$ et $\frac{3\pi}{8} - \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{4}$

4) Dédurre de ce qui précède les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$, $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right)$ et $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)\sin\left(\frac{3\pi}{8}\right)$ puis calculer la valeur exacte de $\tan\left(\frac{3\pi}{8}\right)$

5) On considère le polynôme

$$P(Z) = Z^3 + (i-1)Z^2 + (2i-2)Z + 8$$

a) Montrer que l'équation $P(Z) = 0$ admet une solution réelle que l'on précisera

b) Résoudre l'équation $P(Z) = 0$

⇒ EXERCICE 35

Soit l'équation (E) :

$$Z^2 - (2\cos(\alpha) + i)Z + 1 + \sin(\alpha) + i\cos(\alpha) = 0 \text{ où } \alpha \text{ est un réel appartenant à } \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\cup \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$$

1) Montrer que : $4\cos^2(\alpha) - 5 - 4\sin(\alpha) = -(1 + 2\sin(\alpha))^2$

2) Résoudre l'équation (E) dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes

3) Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On considère les points M_1 , M_2 et M_3 d'affixes respectives : $Z_1 = i + e^{i\alpha}$, $Z_2 = -i + e^{-i\alpha}$ et $Z_3 = Z_1 + Z_2$

a) Montrer que $\frac{Z_1 + Z_2}{Z_2 - Z_1} = i \left(\frac{\cos \alpha}{1 + \sin \alpha} \right)$. En déduire que le quadrilatère $OM_1M_2M_3$ est un losange

b) Déterminer les valeurs de α pour que $OM_1M_2M_3$ soit un carré

c) Exprimer les coordonnées x et y de M_1 en fonction de $\cos(\alpha)$ et $\sin(\alpha)$ puis montrer que M_1 varie sur un cercle $\mathcal{C}_1$ dont on précisera le centre et le rayon

d) En déduire que M_2 varie sur un cercle $\mathcal{C}_2$ dont on précisera le centre et le rayon

4) Déterminer deux réels a et b tels que : $\begin{cases} a+b=\alpha \\ a-b=\frac{\pi}{2} \end{cases}$ puis

déterminer la forme exponentielle de chacun des complexes Z_1 et Z_2

⇒ EXERCICE 36

On désigne par α un nombre appartenant à l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

1) Déterminer la forme exponentielle de chacun des complexes : $u = \tan(\alpha) + i$ et $v = -\tan(\alpha) + i$

2) Montrer que : $(e^{i\alpha})^2 + (\tan(\alpha) - i)^2 = -(e^{i\alpha} \tan(\alpha))^2$

3) Déterminer dans $\mathbb{C}$ les solutions Z' et Z'' de l'équation (E) : $Z^2 - 2ie^{i\alpha}Z + (\tan(\alpha) - i)^2 = 0$

4) Déterminer la forme exponentielle de chacun des complexes : Z' , Z'' , $Z' + Z''$ et $Z' - Z''$

5) Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{U}, \vec{V})$. On considère les points A, B et C d'affixes respectives : Z' , Z'' et $Z' + Z''$

Montrer que le quadrilatère OACB est un losange puis déterminer α pour que OACB soit un carré.

Construire dans ce cas les points A, B et C

EXERCICE 37 On considère l'équation (E_α)

$$Z^2 + i(2 - e^{-i\alpha})Z + e^{-i\alpha} - 1 = 0 \text{ où } \alpha \in]0, 2\pi[$$

- 1) Montrer $Z_0 = -i$ est une solution de (E_α)
- 2) Déterminer en fonction de α la deuxième solution Z_1 de (E_α) puis déterminer sa forme exponentielle
- 3) Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On considère les points M et M' d'affixes respectives Z_1 et $Z' = \bar{Z}_1 + \frac{Z_1}{Z_1}$

a) Déterminer en fonction de α , le module et un argument de Z'

b) Montrer que O, M et M' sont alignés et calculer en fonction de α le produit scalaire $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{OM'}$

4) On considère les points A et B d'affixes respectives : $Z_A = -i$ et $Z_B = 1 - i$. Montrer que M est l'image de B par la rotation $\mathcal{R}_{(A, \frac{\pi}{2} - \alpha)}$. En déduire l'ensemble de

points M lorsque α décrit l'intervalle $]0, 2\pi[$

EXERCICE 38

1) On considère l'équation (E_0) : $Z^2 - 2iZ - 2 = 0$. Résoudre (E_0) dans $\mathbb{C}$ et écrire ses solutions Z' et Z'' sous la forme exponentielle. On notera par Z' la solution telle que $\text{Re}(Z') > 0$. Marquer les points A et B d'affixes respectives Z' et Z'' dans un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$

2) Soit l'équation (E_α) : $Z^2 - 2iZ - (1 + e^{2i\alpha}) = 0$ où α appartient à l'intervalle $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Résoudre (E_α) dans $\mathbb{C}$. On notera par Z_1 sa solution telle que $\text{Re}(Z_1) > 0$ et par Z_2 l'autre solution.

3) Déterminer la forme exponentielle de Z_1 en supposant que α appartient à l'intervalle $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

4) Soient M_1 et M_2 les points d'affixes respectifs Z_1 et Z_2 et soit Ω le milieu de $[M_1 M_2]$

a) Calculer l'affixe de Ω puis montrer que :

$$\Omega A = \Omega M_1 \text{ et } (\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega M_1}) = \alpha \pmod{2\pi}$$

b) Montrer que le triangle $\Omega A O$ est isocèle rectangle en Ω et de sens indirect. En déduire la nature du triangle $\Omega A O'$ où O' est le symétrique de O par rapport à (ΩA)

c) Déterminer et construire l'ensemble Γ_1 des points M_1 lorsque α décrit $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. En déduire la construction de l'ensemble Γ_2 des points M_2

EXERCICE 39

1) Montrer que : $\sin^2(2\alpha) - 4\cos^2 \alpha = -4\cos^4 \alpha$

2) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) :

$$Y^2 + Y \sin(2\alpha) + \cos^2 \alpha = 0 \text{ puis écrire ses racines sous la forme exponentielle}$$

3) Soit le polynôme : $P(Z) = Z^4 + Z^2 \sin(2\alpha) + \cos^2 \alpha$ où α appartient à l'intervalle $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E') : $P(Z) = 0$

b) Déterminer les réels a, b, c, d tels que : $\forall Z \in \mathbb{C}, P(Z) = (Z^2 + aZ + b)(Z^2 + cZ + d)$

EXERCICE 40 On considère l'équation (E) :

$$Z^4 + 2Z^3 - Z^2 + 2Z + 1 = 0$$

1) Montrer que l'équation (E) est équivalente à :

$$Z^2 + 2Z - 1 + \frac{2}{Z} + \frac{1}{Z^2} = 0$$

2) Soit $y = Z + \frac{1}{Z}$. Exprimer $Z^2 + \frac{1}{Z^2}$ en fonction de y

3) Résoudre l'équation (E) par l'emploi de l'inconnue auxiliaire y

EXERCICE 41 On considère les polynômes :

$$P(Z) = Z^3 - (7 + 5i)Z^2 + (4 + 25i)Z + 12 - 30i$$

$$Q(Z) = Z^3 - (7 + 8i)Z^2 + (39i - 9)Z + 44 - 28i$$

1) Vérifier que $P(2) = 0$ puis résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(Z) = 0$

2) Vérifier que $P(Z - i) = Q(Z)$ puis résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $Q(Z) = 0$

EXERCICE 42

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $Z^3 - (3 + 4i)Z^2 - 3(1 - 4i)Z + 9 = 0$ sachant qu'elle admet une solution réelle

2) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E') :

$$Z^3 - (1 + 6i)Z^2 + (3i - 13)Z + 12i = 0 \text{ sachant qu'elle admet une solution imaginaire pure}$$

EXERCICE 43

$$\text{Soit } P(Z) = Z^4 - 3Z^3 + 5Z^2 - 4Z + 2$$

1) Montrer que $\forall Z \in \mathbb{C}, P(\bar{Z}) = \overline{P(Z)}$

2) En déduire que si Z_0 est une solution de $P(Z) = 0$ alors $\bar{Z}_0$ en est une autre

3) Calculer $P(1 + i)$ puis résoudre l'équation $P(Z) = 0$

EXERCICE 44

1) Ecrire sous la forme algébrique $(1 + i)^2$ et $(1 + i)^3$

2) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $Z^2 + 2Z - 2 + 4i = 0$

3) Soit $P(Z) = Z^3 - (1 + 3i)Z^2 - 2(4 + i)Z + 18 - 6i$

a) Montrer que l'équation $P(Z) = 0$ admet une solution Z_0 d'argument $\frac{\pi}{4}$

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(Z) = 0$

EXERCICE 45

1) Ecrire sous la forme algébrique les nombres complexes : $(1 + i\sqrt{3})^2$ et $(1 + i\sqrt{3})^3$

2) On considère le polynôme

$$P(Z) = Z^3 - (4 + 2i\sqrt{3})Z^2 + (6 + 4i\sqrt{3})Z - (4 + 4i\sqrt{3})$$

a) Montrer que l'équation $P(Z) = 0$ admet une solution Z_0 d'argument $\frac{\pi}{3}$

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(Z) = 0$

EXERCICE 46 On considère l'équation (E) :

$$Z^3 + (2-i)Z^2 + (a^2+1-2i)Z - i(1+a^2) = 0$$

- 1) Vérifier que $Z_1 = i$ est une racine de (E)
- 2) Résoudre l'équation (E)
- 3) M étant le point d'affixe a, déterminer les ensembles :
 - Γ_1 : Ensemble des points M tels que les racines de (E) autres que i soient réels
 - Γ_2 : Ensemble des points M tels que (E) admet au moins deux racines de même module

EXERCICE 47

Soit : $P(Z) = Z^3 - (1+i)Z^2 - (3+4i)Z - 1+7i$

- 1) Montrer que l'équation $P(Z) = 0$ possède deux racines opposées que l'on déterminera
- 2) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(Z) = 0$

EXERCICE 48

Soit : $Q(Z) = Z^3 - (6+3i)Z^2 + (13+12i)Z - 10-15i$

- 1) Montrer que l'équation $Q(Z) = 0$ possède deux racines conjuguées que l'on déterminera
- 2) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $Q(Z) = 0$

EXERCICE 49

Soit l'équation (E) : $(1+Z)^n = 1(1-Z)^n$

- 1) Montrer que si Z est une solution de (E) alors :
- 2) Montrer que les solutions de (E) sont imaginaires
- 3) Montrer que pour toute solution Z de l'équation (E), il existe un seul réel $\alpha \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ tel que : $Z = i \tan(\alpha)$
- 4) Déterminer les valeurs de α puis les solutions de l'équation (E)
- 5) Résoudre l'équation (E) par une méthode algébrique.

En déduire les valeurs exactes de $\tan\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\tan\left(\frac{5\pi}{12}\right)$

RACINES NIÈMES D'UN COMPLEXE

EXERCICE 50

Soient les polynômes $P(Z) = Z^3 - 3iZ + 1 - i$
et $Q(Z) = Z^3 + 3Z^2 + 3(1-i)Z + 2 - 4i - 1$

- 1) Déterminer dans $\mathbb{C}$ les racines cubiques de -1
- 2) Montrer que pour tout complexe Z, il existe un couple (u, v) tel que : $(u+v=Z \text{ et } uv=i)$
- 3) Montrer que si : Z est une solution de $P(Z)=0$, alors : $u^3+v^3=-1+i$ et $u^3v^3=-i$
- 4) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(Z)=0$
- 5) Montrer que : $\forall Z \in \mathbb{C} ; Q(Z-1) = P(Z)$. En déduire les solutions de l'équation : $Q(Z)=0$

EXERCICE 51

- 1) Soit le complexe $U = e^{i\alpha}$ avec $\alpha \in]0, 2\pi[$, et soit le complexe Z tel que $U = \frac{Z+1}{Z-1}$. Montrer que : $Z = \cotg\left(\frac{\alpha}{2}\right)$
- 2) Déterminer sous la forme exponentielle les racines cubiques du complexe i

Déduire les racines de l'équation (E) : $(Z+i)^3 = i(Z-i)^3$
3) Résoudre l'équation (E) par une méthode algébrique. En déduire les valeurs exactes de $\cotg\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\cotg\left(\frac{5\pi}{12}\right)$

EXERCICE 52

- 1) Montrer que pour tout réel y, il existe un seul α dans l'intervalle $]0, \pi[$ tel que : $y = \cotg \alpha$
- 2) Montrer que si $|Z+i| = |Z-i|$ alors Z est réel
- 3) Soit l'équation (E) : $(Z+i)^3 = -i(Z-i)^3$
 - a) Montrer que toute solution de (E) s'écrit sous la forme $Z = \cotg(\alpha)$ où $\alpha \in]0, \pi[$
 - b) Déterminer la forme exponentielle des nombres complexes : $i + \cotg(\alpha)$ et $-i + \cotg(\alpha)$
 - c) Résoudre l'équation (E) en déterminant les valeurs de α puis résoudre algébriquement l'équation (E). En déduire les valeurs exactes de $\cotg\left(\frac{7\pi}{12}\right)$ et $\cotg\left(\frac{11\pi}{12}\right)$

EXERCICE 53

On considère les complexes $u = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$ et $v = \frac{1-i\sqrt{3}}{2}$

- 1) Montrer que : Z est une racine cubique de u, si et seulement si, Z est une racine cubique de v
- 2) Déterminer les racines cubiques de u. En déduire les racines cubiques de v
- 3) Soit l'équation (E) : $Z^3 - 3Z - 1 = 0$
 - a) Montrer que pour tout complexe Z, il existe un couple (α, β) tel que : $\alpha + \beta = Z$ et $\alpha\beta = 1$
 - b) Montrer que : Z est une solution de (E), si et seulement si : $\alpha^3 + \beta^3 = 1$ et $\alpha^3\beta^3 = 1$
 - c) Montrer que si Z est une solution de (E), alors α et β sont conjugués
 - d) Déterminer les solutions Z_1, Z_2 et Z_3 de (E)

EXERCICE 54

- 1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $Z^6 - 1 = 0$
- 2) Déduire les racines de (E) : $Z^4 + Z^2 + 1 = 0$
- 3) Ecrire le polynôme $Z^6 - 1$ sous la forme d'un produit de trois trinômes du second degré à coefficients réels
- 4) Ecrire le polynôme $Z^4 + Z^2 + 1$ sous la forme d'un produit de deux trinômes du second degré à coefficients réels

EXERCICE 55

- 1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $Z^6 = -1$. Vérifier que les racines de (E) sont les complexes $Z_n = Z_0 \times q^n$ où $Z_0 = e^{i\frac{\pi}{6}}$, $q = e^{i\frac{\pi}{3}}$ et $0 \leq n \leq 5$
- 2) Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on désigne par $(M_n)_{0 \leq n \leq 5}$ les images des racines de (E)
 - a) Montrer que pour tout entier n tel que $0 \leq n \leq 4$, le triangle $OM_n M_{n+1}$ est équilatéral direct puis construire les points M_n
 - b) Soit S la somme des racines de (E). Montrer que $qS = S$. En déduire que la valeur de S et interpréter géométriquement le résultat