

ACADÉMIE D'ENSEIGNEMENT DE BAMAKA RD

Lycée privé Yaya Coulibaly

LCY ZERNY

Classe : TSE

Durée : 3 heures

DEVOIR SURVEILLÉ DE MATHÉMATIQUES

Il sera tenu compte de la clarté des raisonnements et de la qualité de la rédaction dans l'appréciation de la copie. Toute trace de recherche même incomplète ou non fructueuse développée sera prise en compte

EXERCICE1 : (6 POINTS)

- Montrer que pour tout entier naturel n , le nombre $3^{2n+3} + 2^{n+3}$ est divisible par 7.
- Trouver le reste de la division euclidienne par 7 de l'entier : $19^{52} \times 23^{41}$
- Déterminer les chiffres x et y pour que :
 - L'entier $\overline{3x2y}^{10}$ soit divisible par 4 et 3.
 - L'entier $\overline{7x6y4}^9$ soit divisible par 7 et 8.
- Déterminer l'ensemble des diviseurs naturels du nombre 276. Trouver tous les couples d'entiers naturels $(a; b)$ tels que : $\begin{cases} m + 3d = 276 \\ 10 < d < 30 \end{cases}$ où $m = \text{PPCM}(a; b)$ et $d = \text{PGCD}(a; b)$

EXERCICE2 : (5 POINTS)

- Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $17x + 7y = 18$
- Montrer que pour tout entier n les entiers $14n + 3$ et $5n + 1$ sont premiers entre eux.
 - On considère l'équation (E): $87x + 31y = 2$ où x et y sont des entiers relatifs.
Vérifier en utilisant par exemple la question 1, que 87 et 31 sont premiers entre eux. En déduire un couple $(u; v)$ d'entiers relatifs tel que $87u + 31v = 1$ puis une solution $(x_0; y_0)$ de (E).
 - Déterminer l'ensemble des solutions de (E)
 - Déterminer les points de la droite (D) d'équation $87x - 31y - 2 = 0$ dont les coordonnées sont des entiers naturels et dont l'abscisse est comprise entre 0 et 100.
Indication : un point $M(x, y) \in (D) \Leftrightarrow (x, -y)$ est solution de (E).

PROBLÈME : (9 POINTS)

Les parties A et B sont indépendantes

Partie A

- Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes les équations suivantes :
 - $z^2 - 2z + 5 = 0$
 - $z^2 - 2(1 + \sqrt{3})z + 5 + 2\sqrt{3} = 0$
- On considère dans le plan complexe rapporté à un repère ortho normal direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$ les points A, B, C, D d'affixes respectives : $z_A = 1 + 2i$; $z_B = 1 + \sqrt{3} + i$; $z_C = 1 + \sqrt{3} - i$; $z_D = 1 - 2i$.
 - Placer A, B, C, D et préciser la nature du quadrilatère $ABCD$
 - Vérifier que : $\frac{z_D - z_B}{z_A - z_B} = i\sqrt{3}$. Que peut-on dire des droites (AB) et (BD) ?
 - Prouver que les points A, B, C et D appartiennent à un même cercle Γ dont on précisera le centre et le rayon. Tracer Γ .
- On considère l'équation : (*): $z^2 - 2(1 + 2\cos\theta)z + 5 + 4\cos\theta = 0$; $\theta \in \mathbb{R}$
 - Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (*).
 - Montrer que les images des solutions appartiennent au cercle Γ .

Partie B

Dans le plan complexe rapporté au repère ortho normal direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$, unité graphique 4cm, on considère les points A d'affixe $z_A = 1$ et B d'affixe $z_B = 2$

Soit un réel θ appartenant à l'intervalle $]0; \pi[$ et M le point d'affixe $z = 1 + e^{2i\theta}$.

- Montrer que le point M appartient au cercle (C) de centre A et de rayon 1.
- Exprimer l'angle $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AM})$ en fonction de θ .
 - En déduire l'ensemble E des points M quand θ décrit l'intervalle $]0; \pi[$.

3. Soit f la fonction du plan dans lui-même, qui à tout point M du plan, d'affixe z , fait correspondre le point M' d'affixe z' tel que $z' = e^{-2i\theta} z$. Montrer que $z' = \bar{z}$ puis que M' appartient à (C) .
4. Dans toute la suite, on choisit $\theta = \frac{\pi}{3}$.
 - a. Déterminer l'image de A par f .
 - b. Définir l'image (C') du cercle (C) par f .
 - c. Placer sur une figure $A, B, (C), M, (C')$ puis le point M' image de M par f .
 - d. Montrer que le triangle AMO est équilatéral.
 - e. Montrer que (C) et (C') se coupent en O et en M' .
 - f. Soit P le symétrique du point M par rapport à A .
Montrer que M' est le milieu du segment $[A'P]$.

BON TRAVAIL !!!