



Année Scolaire 2019-2020

Devoir à Domicile TSE

Exercice 1 :

- 1) Soit le polynôme P défini sur $\mathbb{R}$ par : $P(x) = x^3 - x^2 + 3x + 1$.
 - a) Calculer les limites en $+\infty$ et $-\infty$ du polynôme P .
 - b) Déterminer les variations de P sur $\mathbb{R}$.
 - c) Démontrer que l'équation $P(x) = 0$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$ et que $\alpha \in [-1, 0]$.
 - d) Donner un encadrement de α à 10^{-1} .
 - e) Déterminer le signe de $P(x)$ suivant les valeurs de x .
- 2) Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x - \frac{2}{x^2+1}$.
 - a) Déterminer la dérivée de f et montrer que : $f'(x) = \frac{(x+1)P(x)}{(x^2+1)^2}$.
 - b) A l'aide de la question 1e) déterminer le signe de $f'(x)$ et dresser le tableau de Variation de la fonction f .
 - c) Tracer la courbe de f .

Exercice 2 :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{(1+x)^2}{1+x^2}. \text{ Soit } (C) \text{ sa courbe représentative dans un repère orthonormé } (O, \vec{u}, \vec{v}).$$

- 1) Vérifier que pour tout réel x on a : $f(x) = 1 + \frac{2x}{1+x^2}$ et que le point I de (C) d'abscisse nulle est un centre de symétrie de (C) .
- 2) Etudier les variations de f .
- 3) Déterminer une équation de la tangente (T) à (C) qui a pour coefficient directeur 2.
- 4) Représenter (C) et (T) .
- 5) a) Montrer que la restriction gde f à l'intervalle $[-1, 1]$ est une bijection de $[-1, 1]$ sur $[0, 2]$.
- b) Etudier la dérivabilité de g^{-1} en 0 et en 2 (on pourra faire un raisonnement géométrique).
- c) Expliciter $g^{-1}(x)$ pour $x \in [0, 2]$.

Exercice3 :

On considère la fonction f définie par :
$$\begin{cases} f(x) = \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

Soit (Γ) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

1. Déterminer le domaine de définition D_f puis démontrer que f est impaire.
2. Etudier la continuité et la dérivabilité de f en $x_0 = 0$ et à gauche de $x_1 = 1$ puis en déduire la dérivabilité de f à droite de $x_2 = -1$.
3. a) Démontrer que $\forall x \in D_f \quad f'(x) = \frac{1}{1-x^2+\sqrt{1-x^2}}$
b) Étudier les variations de la fonction f et dresser son tableau de variations.
c) Résoudre dans D_f l'équation $f(x) = 0$
4. a) Démontrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} d'un intervalle J dont on déterminera vers D_f puis dresser son tableau de variations.
b) Donner l'expression de la fonction réciproque f^{-1}
5. Tracer les courbes Γ et (Γ') la courbe de la fonction réciproque f^{-1} dans le même repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Exercice4 :

Soit f la fonction définie par :
$$\begin{cases} f(x) = x\sqrt{2-x} & \text{si } x \leq 2 \\ f(x) = x - 1 - \frac{2}{x} & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

Soit (Γ) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

1. a) Etudier la continuité et la dérivabilité de f en $x_0 = 2$.
b) Etudier les variations de la fonction f et dresser son tableau de variations.
2. a) Démontrer que la courbe (Γ) admet une asymptote oblique (D) dont on déterminera l'équation puis étudier sa position relative par rapport à (Γ) .
b) Tracer la courbe (Γ) et l'asymptote (D) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
3. a) Démontrer que la restriction h de la fonction f sur l'intervalle $J =]2, +\infty[$ admet une fonction réciproque h^{-1} d'un intervalle K dont on déterminera vers J .
b) Calculer $h^{-1}\left(\frac{5}{2}\right)$ puis $(h^{-1})'\left(\frac{5}{2}\right)$ et dresser le tableau de variations de h^{-1}
c) Tracer (Γ') la courbe représentative de la fonction réciproque h^{-1} dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Exercice 5 :

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{x^3 - 4x^2 + 8x - 4}{(x-1)^2}$

Et soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1.a) Déterminer le domaine de définition D_f puis les réels a , b et c tels que

$$\forall x \in D_f \quad f(x) = ax + b + \frac{c}{x-1} + \frac{d}{(x-1)^2}$$

b) Etudier les variations de la fonction f et dresser son tableau de variation.

c) Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α et vérifier que $0,7 < \alpha < 0,8$

2.a) Démontrer que la courbe (C) admet deux asymptotes dont l'une (D) est oblique son équation est à préciser puis étudier sa position relative par rapport à (C) .

b) Démontrer qu'il existe un point unique A dont on déterminera les coordonnées où la tangente (T) est parallèle à l'asymptote oblique (D) et donner son équation.

c) Tracer (C) , (D) et (T) .

3. Soit g la restriction de f sur l'intervalle $I =]-\infty, 1[$

a) Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} d'un intervalle J dont on déterminera vers I .

b) Dresser le tableau de variations de g^{-1} puis tracer sa courbe représentative (C') dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

4. Discuter graphiquement suivant les valeurs des deux paramètres m et m' le nombre de solutions de chacune des deux équations paramétriques suivantes :

$$(E_1) \quad x^3 - (m+4)x^2 + 2(m+4)x - (m+4) = 0$$

$$(E_2) \quad f(x) = x + m'$$