

ACADÉMIE D'ENSEIGNEMENT DE BAMAKA RD

Lycée Privé Yaya Coulibaly de Zerny

LCY ZERNY

Classe : TSE

Durée : 3 heures

DEVOIR SURVEILLÉ DE MATHÉMATIQUES

Il sera tenu compte de la clarté des raisonnements et de la qualité de la rédaction dans l'appréciation de la copie. Toute trace de recherche même incomplète ou non fructueuse développée sera prise en compte

EXERCICE1 : (7 POINTS)

1. Mettre sous forme trigonométrique les nombres complexes suivants

$$z_1 = \frac{(1+i\sqrt{3})^{24}}{e^{i\frac{\pi}{3}}}; \quad z_2 = -3e^{i\frac{2\pi}{4}}, \quad z_3 = \frac{1+e^{i\frac{2\pi}{3}}}{1-e^{i\frac{2\pi}{3}}}$$

2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^6 = -1$.

Mettre le polynôme $X^6 + 1$ sous la forme d'un produit de trois polynômes du second degré coefficients réels.

3. Pour tout nombre complexe z , on pose $P(z) = z^4 - 1$

a. Factoriser $P(z)$ dans $\mathbb{C}$.

b. En déduire les solutions, dans l'ensemble $\mathbb{C}$, de l'équation $P(z) = 0$.

c. En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $\left(\frac{2z+1}{z-1}\right)^4 = 1$ d'inconnue z .

EXERCICE2 : (7 POINTS)

- 1.

a. Calculer $(1 - 2\sqrt{3}i)^2$

b. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - z + 3 + i\sqrt{3} = 0$

c. Mettre les solutions sous formes exponentielles.

2. Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points

A, B et M d'affixes respectives $i\sqrt{3}, 1 - i\sqrt{3}$ et $\sqrt{3}e^{i\theta}$ avec $\theta \in \left]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[$.

a. Montrer que $z_M - z_A = 2\sqrt{3}i \sin\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4}\right) e^{i\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right)}$. En déduire la distance AM en fonction de θ .

b. Déterminer θ pour que le triangle OAM soit isocèle en A .

3. On désigne par B' le symétrique de B par rapport à l'axe des réels et N le point du plan tel que $OB'NM$ soit un parallélogramme.

a. Déterminer les affixes des points B' et N .

b. Déterminer l'ensemble des points N lorsque θ varie dans $\left]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[$.

EXERCICES3 : (6 POINTS)

On considère la fonction f de la variable complexe z définie par :

$$f(z) = z^3 + 2(-\sqrt{3} + i)z^2 + 4(1 - i\sqrt{3})z + 8i$$

1. Montrer que $f(z) = 0$ admet une solution imaginaire pure z_0 que l'on déterminera.

2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $f(z) = 0$

On notera z_1 et z_2 les deux autres racines tels que $\text{Im}(z_1) < 0$.

3. On pose $\omega = \frac{z_1}{z_0}$. Donner la forme trigonométrique de ω .

4. Le plan complexe est rapporté un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

A tout nombre complexe z non nul on associe les points M, M_1 et M_2 d'affixe respectives $z, \omega z$ et $\omega^2 z$.

Montrer que OMM_1M_2 est un losange.

Bon travail !!!