

Devoir de Mathématiques			
Classe : TSE	Octobre 2019	Durée : 3 heures	Coef : 06

EXERCICE1 : (5pts)

- 1) Déterminer le module et un argument des nombres complexes suivants puis écrire les sous forme trigonométrique.

a)

$$Z_1 = -2 + 2i\sqrt{3} \quad b) \quad Z_2 = 1 + \cos \frac{\pi}{5} + i \sin \frac{\pi}{5} \quad c) \quad Z_3 = \frac{1 - \cos \alpha + i \sin \alpha}{1 + \cos \alpha - i \sin \alpha} \quad \alpha \in [0 ; \pi[$$

- 2) Dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ on considère les nombres suivants :

a) $Z_1 = (1+i)^{122}$ b) $Z_2 = (1+i)^{200}$ c) $Z_3 = (1+i)^{2006}$. Parmi ces nombres préciser ceux qui sont réels ou imaginaires purs. Justifier votre réponse.

EXERCICE 2 : (5pts)

- 1) Soit l'équation (E) : $Z^5 = 1$.

a) Résous l'équation (E) dans $\mathbb{C}$ et donne les solutions sous forme exponentielle.

b) Démontre que la somme des solutions est nulle et déduis-en que :

$$\cos \frac{2\pi}{5} + \cos \frac{4\pi}{5} = -\frac{1}{2}.$$

c) Déduis de la question précédente b) que $\cos \frac{2\pi}{5}$ est solution de l'équation

$$4X^2 + 2X - 1 = 0.$$

d) Résous l'équation $4X^2 + 2X - 1 = 0$ puis deduis la valeur exacte de $\cos \frac{2\pi}{5}$.

- 2) Linéariser :

a) $\cos^5 \theta$ b) $\sin^4(3\theta)$

PROBLEME : (10pts)

Soit le polynôme P à variable complexe Z défini par :

$$P(Z) = Z^3 - (5+i)Z^2 + (a+ib)Z - 8 - 16i \quad \text{ou } a \text{ et } b \text{ sont des nombres réels non nuls.}$$

- 1) Déterminer les valeurs de a et b pour que $2i$ soit une solution de l'équation

$$P(Z) = 0.$$

- 2) Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation :

$$Z^3 - (5+i)Z^2 + (10+i6)Z - 8 - 16i = 0$$

- 3) Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(o, \vec{u}, \vec{v})$ d'unité 2 cm , on considère les points I, J, K et A d'affixes respectives
- $$Z_I = 2i; Z_J = 3 + i; Z_K = 2 + 2i; Z_A = \sqrt{3} + i.$$
- a) Placer les points I, J, K et A dans ce repère.
- b) Démontrer que les droites (JI) et (JK) sont perpendiculaires.
- 4) Soit B le point du plan tel que $Z_B = \overline{Z_A}$.
- a) Calculer les distances OA, OB et AB . Déduis-en la nature du triangle AOB .
- b) Calculer l'affixe du point C pour que $AOBC$ soit un losange.
- 5) Soit S la similitude plane directe qui transforme B en C et laisse invariant le point O . Déterminer l'expression complexe de S et préciser ses éléments caractéristiques.

« Qui cherche, trouve » Bonne chance !!!!!!!!!