

~ Comité Pédagogique de mathématiques ~

Lycée Kankou Moussa (LKMD)

Devoir de Mathématiques			
Classe : TSE	21 Novembre 2019	Durée : 3 heures	Coef : 06

Lire attentivement :

- ☞ Le sujet est composé de deux exercices et d'un problème tous obligatoires. Il comprend deux pages.
- ☞ La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
- ☞ L'usage de la calculatrice non programmable est autorisé.

Exercice 1 :-----[5 points]1) Démontrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

2) Déterminer les entiers naturels n et p tels que $n^2 - p^2 = 28$.3) Soit $N = 1323$.

- a) Décomposer N en produit de facteurs premiers.
- b) Déterminer le nombre de diviseurs de N et trouver tous les diviseurs de N .
- c) Ecrire N dans le système de numération de base deux.

Exercice 2 :-----[5 points]1) Déterminer le reste de la division euclidienne de 352^{14546} par 5.2) Déterminer les entiers relatifs n pour que $\frac{2n+8}{n-2}$ soit un entier relatif.3) Déterminer les chiffres x et y pour que le nombre $A = \overline{28x75y}$ soit divisible par 3 et 11.4) Résoudre dans $\mathbb{Z}$; $\begin{cases} 3x \equiv 1[5] \\ 5x \equiv 2[7] \end{cases}$ **Problème :-----[10 points]****Partie A :**Dans le plan P rapporté au repère orthonormé direct $(0 ; \vec{u} ; \vec{v})$.On considère les points A, B, C et D les points d'affixe respectives $Z_A = 2i$, $Z_B = i$, $Z_C = -1 + i$ et $Z_D = 1 + i$.

On fera une figure qui sera complétée au fur et à mesure de la résolution.

1) Soit $f : P - \{B\} \rightarrow P$

$$M(z) \mapsto M'(z') \quad \text{tels que} \quad z' = i \left(\frac{z-2i}{z-i} \right)$$

a) Développe $(z + 1 - i)(z - 1 - i)$

b) En déduire les points M tels que $f(M) = M$ et exprimer leurs affixes sous forme trigonométrique et exponentielle.

2) a) Démontrer que pour tout $z \neq i$ et $z \neq 2i$; $\arg(z') = \text{Mes} \left(\widehat{B\vec{M}, A\vec{M}} \right) + \frac{\pi}{2}$

b) Déterminer et construire l'ensemble (E) des points $M(z)$ tels que $|z'| = 1$.

c) Déterminer et construire l'ensemble (F) des points $M(z)$ tels que $\arg(z') = \frac{\pi}{2}$.

3) a) Démontrer que $z' - 1 = \frac{1}{z-i}$ et en déduire que $|z' - i| \times |z - i| = 1$ pour $z \neq i$.

b) En déduire que si $M(z)$ parcourt le cercle de centre B et de rayon $\frac{1}{2}$ alors $M'(z')$ parcourt le cercle $(\mathcal{C}')$ de même centre B et de rayon 2.

Partie B :

Déterminer le module et un argument des nombres complexes suivants :

$$Z_1 = \cos \frac{2\pi}{3} e^{i\theta} ; \quad \theta \in \mathbb{R} .$$

$$Z_2 = \frac{(-1 + i\sqrt{3})(\cos \theta + i \sin \theta)}{\cos \theta + \sin \theta + i(\cos \theta - \sin \theta)} ; \quad \theta \in \mathbb{R} .$$