

~ Comité Pédagogique de mathématiques ~

# Lycée Rosey Abantara (LRAS)

| Devoir de Mathématiques |                  |                         |                  |
|-------------------------|------------------|-------------------------|------------------|
| Classe :<br><b>TSE</b>  | 21 Novembre 2019 | Durée : <b>3 heures</b> | Coef : <b>06</b> |

Lire attentivement :

- 📖 Le sujet est composé de deux exercices et d'un problème tous obligatoires. Il comprend deux pages.
- 📖 La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
- 📖 L'usage de la calculatrice non programmable est autorisé.

**Exercice 1 :-----[5 points]**

1) Démontrer par récurrence que  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ , on a :

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

2) Déterminer les entiers naturels  $n$  et  $p$  tels que  $n^2 - p^2 = 28$ .

3) Soit  $N = 1323$ .

- a) Décomposer  $N$  en produit de facteurs premiers.
- b) Déterminer le nombre de diviseurs de  $N$  et trouver tous les diviseurs de  $N$ .
- c) Ecrire  $N$  dans le système de numération de base deux.

**Exercice 2 :-----[5 points]**

1) Déterminer le reste de la division euclidienne de  $352^{14546}$  par 5.

2) Déterminer les entiers relatifs  $n$  pour que  $\frac{2n+8}{n-2}$  soit un entier relatif.

3) Déterminer les chiffres  $x$  et  $y$  pour que le nombre  $A = \overline{28x75y}$  soit divisible par 3 et 11.

4) Résoudre dans  $\mathbb{Z}$  ;  $\begin{cases} 3x \equiv 1[5] \\ 5x \equiv 2[7] \end{cases}$ .

**Problème :-----[10 points]**

**Partie A :**

Dans le plan  $P$  rapporté au repère orthonormé direct  $(0 ; \vec{u} ; \vec{v})$ .

On considère les points  $A$ ,  $B$ ,  $C$  et  $D$  les points d'affixe respectives  $Z_A = 2i$ ,  $Z_B = i$ ,

---

**\*Rapidité et efficacité feront la différence !\***

$$Z_C = -1+i \text{ et } Z_D = 1+i.$$

On fera une figure qui sera complétée au fur et à mesure de la résolution.

1) Soit  $f : P - \{B\} \longrightarrow P$

$$M(z) \longmapsto M'(z') \quad \text{tels que} \quad z' = i \left( \frac{z-2i}{z-i} \right)$$

a) Développe  $(z+1-i)(z-1-i)$

b) En déduire les points  $M$  tels que  $f(M)=M$  et exprimer leurs affixes sous forme trigonométrique et exponentielle.

2) a) Démontrer que pour tout  $z \neq i$  et  $z \neq 2i$ ;  $\arg(z') = \text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{AM}}) + \frac{\pi}{2}$

b) Déterminer et construire l'ensemble (E) des points  $M(z)$  tels que  $|z'|=1$ .

c) Déterminer et construire l'ensemble (F) des points  $M(z)$  tels que  $\arg(z') = \frac{\pi}{2}$ .

3) a) Démontrer que  $z' - 1 = \frac{1}{z-i}$  et en déduire que  $|z' - i| \times |z - i| = 1$  pour  $z \neq i$ .

b) En déduire que si  $M(z)$  parcourt le cercle de centre  $B$  et de rayon  $\frac{1}{2}$  alors  $M'(z')$  parcourt le cercle ( $\mathbf{C'}$ ) de même centre  $B$  et de rayon 2.

### Partie B :

Déterminer le module et un argument des nombres complexes suivants :

$$Z_1 = \cos \frac{2\pi}{3} e^{i\theta} ; \quad \theta \in \mathbb{R} .$$

$$Z_2 = \frac{(-1+i\sqrt{3})(\cos \theta + i \sin \theta)}{\cos \theta + \sin \theta + i(\cos \theta - \sin \theta)} ; \quad \theta \in \mathbb{R} .$$