

LYCEE BAMINATA COULIBALY (L.BAC)

Comité Pédagogique de Mathématiques

Année D'étude 2019 – 2020

Devoir N°1 de Mathématiques

SERIE : TSE

DURÉE : 3H

COEFF : 5

☐ Ce Sujet est composé de deux exercices et un problème tous obligatoires.

☐ Toute trace de recherche ou d'initiative raisonnable, même incomplète ou non fructueuse, sera prise en compte dans l'attribution des points.

EXERCICE 1 : (5 Points)

Connaissances : Pour chacune des propositions suivantes, vous répondrez par vrai ou faux, en tout cas, la réponse choisie doit être justifiée par une démonstration logique et soignée. Une affirmation non justifiée ne rapportera aucun point.

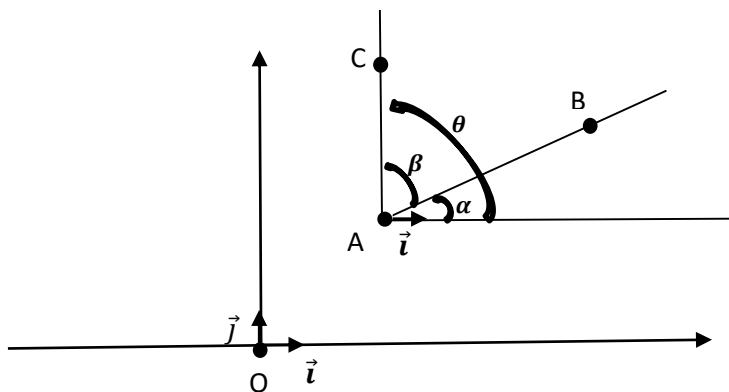
Proposition 1 : $(1 + i) \left(\sin \frac{2\pi}{3} - i \cos \frac{2\pi}{3} \right) e^{i\frac{\pi}{6}} = \sqrt{2} e^{i\frac{7\pi}{12}}$ **1pts**

Proposition 2 : $[(i)^3(i)^5 i]^{12092} = i$ **1pts**

Proposition 3 : $1 + \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} = \left(1 + e^{i\frac{2\pi}{3}} \right) \left(1 - e^{i\frac{2\pi}{3}} \right)$ **1pts**

Proposition 4 : NB : On ne demande pas de reproduire la figure.

Dans le plan rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ soient les points $A(z_A)$, $B(z_B)$ et $C(z_C)$. Les angles orientés sont : $(\vec{i}, \overrightarrow{AB}) = \alpha$; $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \beta$ et $(\vec{i}, \overrightarrow{AC}) = \theta$ (voir figure ci-dessous)



On affirme que : $\beta = \theta - \alpha \Leftrightarrow (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \text{Arg} \left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \right)$ **1pts**

Proposition 5 : Dans le plan rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ soit f l'application qui à tout point $M(z)$ associe le point $M'(z')$ telle que : $z' = i|1 - \sqrt{3}i|z - 1 + i$

f est la rotation de centre $\Omega(1, -1)$ et d'angle $\alpha = \frac{-\pi}{6}$ **1pts**

EXERCICE 2 : **(5 Points)**

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{u}, \vec{v})$

soient $(\mathcal{C})$ le cercle de centre O et de rayon $R = 1$ et les points $I(1)$ et $A(a = \sqrt{3} + i)$

1- Soit B le point d'affixe $b = \frac{a-1}{1-\bar{a}}$

a- Vérifie que $b\bar{b} = 1$ puis déduis-en que le point B appartient au cercle $(\mathcal{C})$ **1.5pts**

b- Prouve que $\frac{b-1}{a-1}$ est un réel puis déduis-en que les points A, B et I sont alignés. **1.5pts**

c- Construis le point B dans le plan. **0.5pts**

2- Soit θ un argument du complexe b . Démontre que $\cos\theta = \frac{2\sqrt{3}-3}{5-2\sqrt{3}}$ et $\sin\theta = \frac{2-2\sqrt{3}}{5-2\sqrt{3}}$ **1.5pts**

PROBLEME : **(10 Points)**

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{u}, \vec{v})$

1- Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 + 2\sqrt{3}z + 4 = 0$ **1pts**

2- Soit l'équation $(E) : z^3 + 2(\sqrt{3} - 1)z^2 + 4(1 - \sqrt{3})z - 8 = 0$

a- Vérifie que 2 est solution de (E) **0.5pts**

b- Déduis-en la résolution de l'équation (E) dans $\mathbb{C}$ **1.25pts**

3- soient A, B et I les points d'affixes $z_A = 2$; $z_B = -\sqrt{3} + i$ et $z_I = z_A \times z_B$

a- Ecris z_B sous forme trigonométrique puis place A et B dans le plan **1.25pts**

b- Montre que le triangle OAB est isocèle et en déduire une mesure de l'angle $(\widehat{OAB})$ **1.5pts**

c- Calcule OI et déduis-en la forme trigonométrique de z_I **1.5pts**

d- Déduis les valeurs exactes de $\cos \frac{5\pi}{12}$ et $\sin \frac{5\pi}{12}$ des questions précédentes. **1pts**

4- a- Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^5 = 2e^{i\theta}$, $\theta \in \mathbb{R}$ **1pts**

b- Déduis-en les solutions de l'équation $z^{10} - 2\sqrt{3}z^5 + 4 = 0$ **1pts**

« La rapidité, l'extrême vigilance et l'ingéniosité seront vos meilleurs atouts. »