

LYCEE BAMINATA COULIBALY (L.BAC)

Comité Pédagogique de Mathématiques
Année D'étude 2019 – 2020

Devoir N° 3

SERIE : TSE

DURÉE : 3 H

COEFF : 5

EXERCICE 1 : (4 Points)

Pour tout entier naturel $n \geq 0$, on pose $I_n = \int_1^{e^2} \frac{(\ln x)^n}{x^2} dx$

1- Calculez $\int_1^{e^2} \frac{1}{x^2} dx$ puis en déduire I_0 **0.75pt**

2- Calculez I_1 au moyen d'une intégration par parties **1pt**

3- Montrez que pour tout $n \geq 0$, $I_n > 0$ **0.5pt**

4- En utilisant une intégration par parties, prouvez que pour tout $n \geq 1$,

$$I_{n+1} = -\frac{2^{n+1}}{e^2} + (n+1)I_n \quad \mathbf{1pts}$$

5- En utilisant les résultats précédents, calculez successivement I_2 et I_3 **0.75pt**

EXERCICE 2 : (4 Points)

1- Résolvez dans $\mathbb{R}$ chacune des équations suivantes

a- $\ln(x-1) + \ln(x+1) - \ln 2x = 0$ **1pt**

b- $\ln \sqrt{2x-3} = \ln(6-x) - \frac{1}{2} \ln x$ **1pt**

c- $\text{Log}_{\frac{2}{3}}(2x) - 5\text{Log}_{\frac{2}{3}}(2x) + 6 < 0$ **1pt**

2- Résolvez le système

$$(x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \begin{cases} x^2 + y^2 = 29 \\ \text{Log}_2 x + \text{Log}_2 y = \frac{\ln 10}{\ln 2} \end{cases} \quad \mathbf{1pts}$$

PROBLEME : (12 Points)

On considère la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ $\begin{cases} f(x) = x \ln \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) \text{ si } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$ On note $(\mathcal{C})$ la courbe de f dans le plan $(\mathcal{P})$ munit d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. **Unité graphique 3cm**

I- Etude d'une fonction axillaire g

On considère la fonction g définie sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) - \frac{2}{x^2+1}$

- 1- Calculez les limites de g aux bornes de $]0; +\infty[$ **0.75pt**
- 2- Etudiez le sens de variation de g puis dressez son tableau de variation **1.5pt**
- 3- Montrez que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α tel que $0 \leq \alpha \leq 1$ **0.5pt**
- 4- Donnez un encadrement de α au 10^e près **0.5pt**
- 5- Donnez le signes de $g(x)$ sur $]0; +\infty[$ **0.5pt**

II- Etude de la fonction principale f

- 1- Etudiez la dérivabilité de f en 0 puis précisez la nature de la tangente à $(\mathcal{C})$ en 0 **1pt**
- 2- a- Calculez la limites de f en 0^+ **0.5pt**
b- Calculez la limite de f en $+\infty$ On pourra poser $X = \frac{1}{x^2}$ **0.5pt**
- 3- Calculez et montrez que pour tout $x \in]0; +\infty[$, $f'(x) = g(x)$ **1pt**
- 4- Dressez le tableau de variation de f **0.5pt**
- 5- a- Démontrez l'égalité $f(\alpha) = \frac{2\alpha}{\alpha^2+1}$ **0.75pt**
b- Déduisez-en un encadrement de $f(\alpha)$ au dixième près. **0.75pt**
- 6- Déterminez l'équation de la tangente à la courbe $(\mathcal{C})$ au point d'abscisse 1 **0.5pt**
- 7- Donnez l'allure de $(\mathcal{C})$ dans le repère **0.75pt**

III- Calcul d'aire

On définit la portion D du plan par $D = \left\{ M(x, y) \in (\mathcal{P}) / \begin{matrix} 1 \leq x \leq 2 \\ 0 \leq y \leq f(x) \end{matrix} \right\}$

Soit F la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $F(x) = \frac{1}{2} \left[x^2 \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) + \ln(x^2 + 1) \right]$

- 1- Donnez l'interprétation graphique du domaine D **0.5pt**
- 2- Montrez que F est une primitive de f **0.75pt**
- 3- Hachurez et en déduire en unité d'aire, la valeur exacte de la surface du domaine D **0.75pt**

« La rapidité, l'extrême vigilance et l'ingéniosité seront vos meilleurs atouts . »