Lycée Mgr Jean Marie Cissé	Devoir de Maison N°2	Classe : TSE
Année scolaire 2020-2021	Mathématiques	A rendre le 11 mars 2021

Exercice 1 : On considère, dans $\mathbb{C}$, l'équation :

$$(E) : z^4 - 4(1+i)z^3 + (22i-5)z^2 + (38-18i)z - 72 - 24i = 0.$$

1. Montrer que l'équation (E) admet une solution réelle z_0 que l'on déterminera.
2. Montrer que l'équation (E) admet une solution imaginaire pure z_1 que l'on déterminera.
3. Résoudre l'équation (E). On appellera z_2 et z_3 les autres solutions telles que :
$$Re(z_2)0 \ et \ Re(z_3) < 0.$$
4. Dans le plan complexe munit d'un repère orthonormé $(O;\ \vec{u};\ \vec{v}\ )$ les points A, B, C et D les points d'affixes respectives z_1, z_0, z_2 et z_3.
5. Déterminer une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CB}\right)$. Quelle est la nature du triangle ABC ?

Exercice 2 :

1. a. Déterminer les racines quatrièmes de l'unité sous la forme que vous souhaitez.

   b. Calculer $(3+i)^2$. En déduire les racines quatrièmes de $28+96i$.

2. Déterminer les racines cubiques de $\frac{1}{4} - \frac{1}{4}i$ sous formes trigonométriques et exponentielles.
3. Déterminer sous formes trigonométriques et exponentielles les racines cinquièmes de
$$-32-32i.$$
4. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $[(1-i)z]^3 + i = 0$.
5. Linéariser les expressions suivantes : $cos^5 x$; $sin^5 x$; $cos^2 4x.sin^3 2x$
6. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $2z^2 - 2(1-\cos 2\alpha)z + 1 - 2\cos 2\alpha = 0,\ \alpha \in \left]0;\frac{\pi}{2}\right[$. Déterminer, en fonction de α, le module et un argument de chacune des solutions.
7. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - (1+i\sin 2\varphi)z + \frac{1}{2}i\sin 2\varphi = 0,\ \varphi \in \left]0;\frac{\pi}{2}\right[$ et écrire les solutions $z_1\ et\ z_2$ sous frome trigonométrique.

Exercice 3 : Les points *A, B, M,* et *M'* du plan complexe ont pour affixes respectives *2+4i ; -i ; z ; et z'.* On pose: $z' = \frac{-iz-2+4i}{z+i}$ avec $z = x+iy$ et $z' = x' + iy'$.

1) Exprimer les coordonnées *(x' ; y')* du point *M'* en fonction de celles *(x ; y)* du point *M.*
2) Déterminer et représenter l'ensemble des points M tels que :
a) *z'* soit réel b) *z'* soit imaginaire pur
3) On pose $Z = z+i$ et $Z' = z'+i$. Vérifier que *ZZ'=-3+4i* puis calculer |*ZZ'*|.
4) Déterminer et représenter l'ensemble décrit par les points *M'* lorsque *M* décrit un cercle de centre *B* et de rayon *r.* Déterminer *r* pour que *M et M'* soit sur un même cercle.

Exercice 4 : Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O;\ \vec{u};\ \vec{v})$ (unité graphique 2cm), on considère les points A et B d'affixes respectives $z_A = -1$ et $z_B = 3i$. Soit la fonction *f* qui au point M d'affixe $z \neq -1$ du plan associe le point M' d'affixe z' telle que :

$$z' = i\left(\frac{z-3i}{z+1}\right).$$

Montrer que pour tout point M distinct de A et de B :

$$OM' = \frac{BM}{AM} \quad et \quad \left(\vec{u};\overrightarrow{OM'}\right) = \frac{\pi}{2} + \left(\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB}\right) + 2k\pi.$$