

Lycée Mgr Jean Marie Cissé	Devoir Surveillé N°1	Classe : TSE	Durée : 3H
Année scolaire 2020-2021	Mathématiques	Date : 19/03/2021	

Exercice 1 : (7 points)

1. Mettre sous forme trigonométrique les nombres complexes suivants :

$$z_1 = \frac{(1 + i\sqrt{3})^{24}}{e^{i\frac{\pi}{3}}}; \quad z_2 = -3e^{i\frac{2\pi}{4}}; \quad z_3 = \frac{1 + e^{i\frac{2\pi}{3}}}{1 - e^{i\frac{2\pi}{3}}}; \quad z_4 = \frac{(1 + i \tan \theta)^2}{1 + \tan^2 \theta} \quad \theta \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$$

2. a. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^4 = 1$.

b. Calculer $\left(\frac{1}{2} + i\right)^4$. En déduire les racines quatrièmes de $-\frac{7}{16} - \frac{3}{2}i$.

3. Pour tout nombre complexe z on pose : $P(z) = z^4 - 1$.

- a. Factoriser $P(z)$ dans $\mathbb{C}$. En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $P(z) = 0$.

- b. En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation : $\left(\frac{2z+1}{z-1}\right)^4 = 1$, d'inconnue z .

Exercice 3 : (4 points)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{u}; \vec{v})$ (unité graphique 2cm), on considère les points A et B d'affixes respectives $z_A = -1$ et $z_B = 3i$. Soit la fonction f qui au point M d'affixe $z \neq -1$ du plan associe le point M' d'affixe z' telle que : $z' = i\left(\frac{z-3i}{z+1}\right)$.

- 1) Soit C le point d'affixe $z_C = 2 - i$. Montrer qu'il existe un seul point D tel que : $f(D) = C$.
- 2) Déterminer la nature du triangle ABC.
- 3) Montrer que pour tout point M distinct de A et de B :

$$OM' = \frac{BM}{AM} \quad \text{et} \quad (\vec{u}; \overrightarrow{OM'}) = \frac{\pi}{2} + (\overrightarrow{MA}; \overrightarrow{MB}) \quad [2\pi].$$

Exercice 2 : (8 points)

1. On considère la fonction f de la variable complexe z définie par :

$$f(z) = z^3 + 2(-\sqrt{3} + i)z^2 + 4(1 - i\sqrt{3})z + 8i.$$

- a. Montrer que l'équation $f(z) = 0$ admet une solution imaginaire pure z_0 que l'on déterminera.
- b. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $f(z) = 0$.

2. Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$, on considère les points A,

B et M d'affixes respectives $z_A = i\sqrt{3}$; $z_B = 1 - i\sqrt{3}$; $z_M = \sqrt{3}e^{i\theta}$ avec $\theta \in \left]\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right[$.

- a. Montrer que $z_M - z_A = 2i\sqrt{3} \cdot \sin\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \cdot e^{i\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right)}$. En déduire la distance AM en fonction de θ .
 - b. Déterminer les valeurs de θ pour que le triangle OAM soit isocèle en A.
3. On désigne par B' le symétrique de B par rapport à l'axe des réels et N le point du plan tel que le quadrilatère OB'NM soit un parallélogramme.
- a. Déterminer les affixes des points B' et N.
 - b. Déterminer l'ensemble décrit par le point N lorsque θ varie dans $\left]\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right[$.