

Académie d'Enseignement de Bamako Rd

Lycée Privé Yaya Coulibaly de Zerny

LCY ZERNY

Classe : TSE

Durée : 3 heures

Devoir surveillé de mathématiques N°1

Il sera tenu compte de la clarté des raisonnements et de la qualité de la rédaction dans l'appréciation de la copie. Toute trace de recherche même incomplète ou non fructueuse développée sera prise en compte

Exercice1 : (7 points)

A.

1. Déterminer le module et un argument des nombres complexes suivants : (1,5 pts)

$$z_1 = \frac{(-\sqrt{3} + i)^3}{(1 + i)^2}; z_2 = \frac{(-1 + i\sqrt{3})(\cos \theta + i \sin \theta)}{\cos \theta + \sin \theta + i(\cos \theta - \sin \theta)}, \theta \in \mathbb{R}$$

2. Linéariser les expressions suivantes : $A = \cos^2 x \sin^3 x$; $B = \sin 3x \cos^2 x$. (1,5 pts)

3. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^4 = \left(\frac{1-i}{1-i\sqrt{3}}\right)^4$. (1 pt)

- B. Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{u}; \vec{v})$, on désigne par A, B, C et I les points d'affixes respectives : $z_A = -2i$, $z_B = 1 + i$, $z_C = 4 + 2i$ et $z_I = 2$.

1.

- Placer sur une figure les points A, B, C , et I . (1 pt)
- Montrer que le point I est le milieu du segment $[AC]$. (0,5 pt)
- Montrer que le triangle ABC est isocèle en B . (0,5 pt)
- Soit D le symétrique de B par rapport à I .
 - Déterminer l'affixe du point D . (0,5 pt)
 - Montrer que le quadrilatère $ABCD$ est un losange. (0,5 pt)

Exercice2 : (6 points)

Le plan étant rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$.

- Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E): z^2 - (3 + i)z + 2(1 + i) = 0$. (1 pt)
- Soit l'équation $(E_\theta): z^2 - (3 + i)e^{i\theta}z + 2(1 + i)e^{i2\theta} = 0$. $\left(\theta \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]\right)$.
 - Montrer que z_0 est une solution de (E_θ) si et seulement si $(z_0 e^{-i\theta})$ est une solution de (E) . (0,5 pt)
 - Résoudre, dans $\mathbb{C}$, l'équation (E_θ) . (0,75 pt)
- On considère les points A, B et C d'affixes respectives $a = 2e^{i\theta}$; $b = (1 + i)e^{i\theta}$ et $c = ie^{i\theta}$.
 - Donner la forme exponentielle de b et c . (1 pt)
 - Montrer que $(OA) \perp (OC)$ et $(BO) \perp (BA)$. (1 pt)
 - Construire les points A, B et C pour une valeur de θ choisie arbitrairement dans $]0; \frac{\pi}{2}[$. (0,75pt)
- Montrer que $OABC$ est un trapèze $\left(\forall \theta \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]\right)$. (0,5 pt)
 - Vérifier que l'aire de ce trapèze est constante $\left(\forall \theta \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]\right)$. (0,5 pt)

Exercice3 : (7 points)

On considère le nombre complexe $a = e^{i\frac{2\pi}{5}}$. On note I, A, B, C, D les points du plan complexe d'affixes : $1; a; a^2; a^3; a^4$.

- Vérifier que $a^5 = 1$. (0,5 pt)
- Montrer que $IA = AB = BC = CD = DI$. (1 pt)
- Vérifier que, pour tout z complexe : $z^5 - 1 = (z - 1)(z^4 + z^3 + z^2 + z + 1)$. (0,5 pt)
- En déduire que $1 + a + a^2 + a^3 + a^4 = 0$. (0,75 pt)
- Montrer que $a^3 = \bar{a}^2$ et que $a^4 = \bar{a}$. (1 pt)
- En déduire que $(a + \bar{a})^2 + (a + \bar{a}) - 1 = 0$. (0,75 pt)
- Résoudre, dans $\mathbb{R}$, l'équation $4x^2 + 2x - 1 = 0$. (0,5 pt)
- Calculer $(a + \bar{a})$ et en déduire la valeur exacte de $\cos \frac{2\pi}{5}$. (1 pt)
- Placer les points I, A, B, C et D dans le plan complexe (unité 4 cm). (1 pt)

Bon travail !!!