

Contrôle N°1			
SERIE: TSE	Epreuve de Mathématiques	Durée: 3heures	Coeff: 5
✓ L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée. ✓ La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. ✓ Écrire lisiblement et vérifier que le sujet est complet: il comporte 2 pages numérotées de 1/2 et 2/2.			

Exercice1..... (7.5 points)

- I.** Pour tout entier naturel n , on pose $S_n = (1 + i)^n + (1 - i)^n$.
- 1- N'golo affirme que pour tout entier naturel n , S_n est un nombre réel. A-t-il raison? Justifier. **(0.5 point)**
- 2- Existe-il une infinité d'entiers naturels n tels que $S_n = 0$? **(0.5 point)**
- II.** Montrer que le nombre $(1 - i\sqrt{3})^{42}$ est réel. Quel est son signe? **(1 point)**
- III.** Soient A, B et C des points dans le plan complexe d'affixes respectifs

$$a = 2 + i, b = 3 + 2i \text{ et } c = 5 - i$$

Soit β une mesure de l'angle orienté: $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})$. Calculer $\tan \beta$. **(1 point)**

IV.

- 1- Rappeler les formes algébrique, exponentielle et trigonométrique d'un nombre complexe Z non nul. **(0.75 point)**
- 2- Mettre sous forme trigonométrique et exponentielle les nombres complexes suivants:
- a) $Z_1 = 1 + e^{2i\theta}, \theta \in]0; \frac{\pi}{2}]$ **(0.75 point)**
- b) $Z_2 = 2 + \sqrt{2} + i\sqrt{2}$ **(0.75 point)**
- c) $Z_3 = (\sqrt{6} + \sqrt{2}) + i(\sqrt{6} - \sqrt{2})$ **(0.75 point)**
- 3- Pour tout $\alpha \in]-\pi; \pi[$, on définit: $Z = -\sin 2\alpha + 2i \cos^2 \alpha$. Calculer le module et l'argument de Z et Déterminer α tel que Z et $1-Z$ ait même module. **(1.5 point)**

Exercice2..... (6 points)

Les points A, B, M et M' du plan complexe ont pour affixes respectives: $2-4i$, $-i$, z et z' avec

$$z' = \frac{-iz - 2 + 4i}{z + i}$$

- 1- On pose $z = x + iy$. Déterminer la partie réelle et la partie imaginaire de z' en fonction de x et y . **(1 point)**
- 2- Déterminer l'ensemble des points M tels que:
- a) z' soit réel. **(1 point)**
- b) z' soit imaginaire pur. **(1 point)**
- 3- On pose $Z = z + i$ et $Z' = z' + i$. vérifier que $ZZ' = -3 + 4i$. Puis calculer $|ZZ'|$. **(2 point)**

4- a) Déterminer l'ensemble des points M' lorsque M décrit un cercle de centre B et rayon $r > 0$. **(0.5 point)**

b) Déterminez r pour que M et M' soient sur le même cercle. **(0.5 point)**

Exercice3.....6.5 points

1- Soit $p(z) = z^3 + 3z^2 - 3z - 5 - 20i$, $z \in \mathbb{C}$.

a) Démontrer que $2+i$ est une racine de $p(z)$. **(0.5 point)**

b) En déduire les solutions de l'équation $p(z) = 0$ dans $\mathbb{C}$. **(1 point)**

2- Dans le plan (P) rapporté au repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$ d'unité 1cm, on considère les points A, B et C d'affixes respectives $2+i$, $-1-2i$ et $-4+i$.

a) Placer les points A, B et C puis calculer les distances AB et BC . **(1 point)**

b) Démontrer que $\arg\left(\frac{z_C - z_B}{z_A - z_B}\right) = (\widehat{\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}}) [2\pi]$ **(0.25 point)**

c) En déduire une mesure en radian de l'angle $(\widehat{\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}})$. **(0.5 point)**

d) Déduire de tout ce qui précède la nature du triangle ABC . **(0.5 point)**

3- Soit r la rotation qui laisse invariant le point B et qui transforme A en C .

a) Montrer que l'application f associée à r est définie par: $f(z) = iz - 3 - i$. **(0.5 point)**

b) Préciser les éléments caractéristiques de r . **(0.5 point)**

4- Soit $T: M(z) \rightarrow M'(z')$ telle que $z' = i\alpha^2 z + \alpha$, $\alpha \in \mathbb{C}$.

a) Déterminer les valeurs de α pour lesquelles T est une homothétie de rapport 2. **(0.5 point)**

b) Déterminer les éléments caractéristiques de T pour le nombre complexe α vérifiant $|\alpha| = \sqrt{2}$ et $\arg \alpha = -\frac{\pi}{4}$. **(0.5 point)**

5- On considère la transformation $g = r \circ T$. On suppose dans ce qui suit que $\alpha = 1 - i$.

a) Montrer que l'application h associée à g est définie par: $h(z) = 2iz - 2$. **(0.25 point)**

b) Donner les éléments caractéristiques de g . **(0.5 point)**