

Devoir surveillé de mathématiques

SÉRIE : TSE

Durée : 3 heures

Coeff : 5

Il sera tenu compte de la clarté des raisonnements et de la qualité de la rédaction dans l'appréciation de la copie.

Exercice 1 : (8 points)

1. Linéarise les expressions suivantes : $A = \sin 3x \cos^2 x$; $B = 4 \cos^3 x \sin^2 5x$. **2 pts**
2. Détermine l'entier naturel n pour que le nombre complexe $(1+i)^n$ soit un réel positif. **1 pt**
3. Calcule $(1+2i)^4$ puis résous dans $\mathbb{C}$ l'équation $(z+i)^4 = -7-24i$. **1.5 pt**
4. Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation : $(z^2 - 4z + 5)^2 + (z+1)^2 = 0$. **1.5 pt**
5. On se propose de résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $\left(\frac{z+i}{z-i}\right)^3 + \left(\frac{z+i}{z-i}\right)^2 + \left(\frac{z+i}{z-i}\right) + 1 = 0$.
 - a. Montre que pour tout nombre complexe $u \neq 1$ on a : $u^3 + u^2 + u + 1 = \frac{u^4-1}{u-1}$. **0.5 pt**
 - b. Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation : $u^3 + u^2 + u + 1 = 0$. **0.75 pt**
 - c. En déduis dans $\mathbb{C}$ les solutions de l'équation : $\left(\frac{z+i}{z-i}\right)^3 + \left(\frac{z+i}{z-i}\right)^2 + \left(\frac{z+i}{z-i}\right) + 1 = 0$. **0.75 pt**

Exercice 2 : (6 points)

1. Soit le complexe $z = (1 - \sqrt{3}) - i(1 + \sqrt{3})$
 - a. Calcule z^2 sous forme algébrique. **0.5 pt**
 - b. Détermine le module et un argument de z^2 . En déduis le module et un argument de z . **1.5 pt**
 - c. En déduis les valeurs exactes de $\cos \frac{17\pi}{12}$ et $\sin \frac{17\pi}{12}$. **1 pt**
 - d. Résous dans $\mathbb{R}$ l'équation : $(1 - \sqrt{3}) \cos x - (1 + \sqrt{3}) \sin x = 2$. **1 pt**
2. On considère le nombre complexe $z = \frac{6-\sqrt{13}}{8} + i \frac{\sqrt{5}-2\sqrt{3}}{8}$.
 - a. Montre que $|z| = \frac{2\sqrt{3}-\sqrt{5}}{4}$. **1 pt**
 - b. En déduis la forme trigonométrique de z . **1 pt**

Exercice 3 : (6 points)Soit θ un réel de l'intervalle $]0; \frac{\pi}{2}[$.On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E): $z^3 + 2(2 \cos \theta - i)z^2 + 4(1 - 2i \cos \theta)z - 8i = 0$.

1. Montre que l'équation (E) admet une solution imaginaire pure z_0 que l'on déterminera. **0.75 pt**
2. Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation (E). **1.75 pt**
3. Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormé direct $(o; \vec{u}; \vec{v})$, on considère les points A, M et M' d'affixes respectives : $2i, -2e^{-i\theta}, -2e^{i\theta}$.
 - a. Vérifie que les points A, M et M' appartiennent à un même cercle de centre O. **0.75 pt**
 - b. Détermine le réel θ pour que OAMM' soit un parallélogramme. **0.75 pt**
4. Dans la suite on pose $\theta = \frac{\pi}{6}$.
 - a. Exprime sous forme exponentielle l'affixe de M puis celle de M'. **0.5 pt**
 - b. Place les points A, M et M' dans le plan complexe $(o; \vec{u}; \vec{v})$. **0.75 pt**
 - c. Quelle est la nature du quadrilatère OAMM' ? Justifie la réponse. **0.75 pt**

Bon travail !!!