

Exercice1 : (6 points)

Soit le polynôme P défini par: $P(z) = z^3 - [(2 + i)\sin\alpha]z^2 + (1 + 2i\sin^2\alpha)z - i\sin\alpha = 0$ avec $z \in \mathbb{C}$ et $\alpha \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$.

- 1) Démontrer que l'équation $P(z) = 0$ admet une solution imaginaire pure z_0 que l'on déterminera.
- 2) a) Déterminer le polynôme $Q(z)$ tel que : $P(z) = (z - z_0)Q(z)$.
b) Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation $P(z) = 0$. On notera z_1 et z_2 les autres solutions telles que $\text{Im}(z_1) < \text{Im}(z_2)$ où $\text{Im}(z)$ désigne la partie imaginaire de z .
- 3) Donner z_0 ; z_1 et z_2 sous la forme trigonométrique.
- 4) Le plan complexe étant muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$, on considère les points A, B et C les images respectives de z_0 ; z_1 et z_2 .
a) Démontrer que ABC est un triangle rectangle en A pour une valeur de α que l'on précisera.
b) Trouver une condition nécessaire et suffisante portant sur α telle que ABC soit isocèle de sommet A, puis en déduire que ce triangle n'est pas isocèle en A.
- 5) Soit $\alpha = \frac{11\pi}{12}$, déterminer la partie réelle de $\left(\frac{z_1}{z_3}\right)^{1997}$.

Données : $\sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = 35,26$.

Exercice2 : (6 points)

On pose $P(z) = z^4 - 6z^3 + 23z^2 - 34z + 26$.

- 1) α désigne un complexe quelconque. Montrer que $P(\bar{\alpha}) = \overline{P(\alpha)}$. En déduire que si $P(\alpha) = 0$, alors $P(\bar{\alpha}) = 0$.
- 2) Calculer $P(1 - i)$, en déduire les solutions de l'équation $P(z) = 0$.
- 3) Placer les points images des solutions de l'équation $P(z) = 0$ dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$.
- 4) Montrer que tous ces points appartiennent à un même cercle dont on précisera le centre et le rayon (Points cocycliques).

Problème : (8 points)

- A-** Le plan complexe P est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$; unité : 2cm. On considère l'application f définie sur $\mathbb{C}^*$ par $f(z) = -\frac{1}{z}$. F est l'application du plan P privé de 0 dans lui-même qui à tout point M d'affixe z , associe le point M' d'affixe $z' = f(z)$.
- 1) On pose $z = re^{i\theta}$, $r \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Exprimer le module et un argument de $f(z)$ en fonction de r et θ .
 - 2) On pose $z = x + iy$ et $Z = X + iY$ où Z est l'affixe du milieu I de $[MM']$, x, y, X et Y sont des réels.
 - a) Exprimer X et Y en fonction de x et y .
 - b) Déterminer et représenter l'ensemble (ε) des points M tels que I appartienne à l'axe $(O; \vec{u})$.
 - c) Déterminer et représenter l'ensemble (τ) des points M tels que I appartienne à l'axe $(O; \vec{v})$.
 - 3) On suppose $|z| = 1$. On pose donc $z = e^{i\theta}$, $\theta \in \mathbb{R}$.
 - a) Calculer Z en fonction de θ .
 - b) Caractériser géométriquement la restriction de F au cercle de centre 0 et de rayon 1.
- B-** On considère le polynôme P défini par $P(z) = z^3 - (1 - i)z^2 + z - 1 + i$; $z \in \mathbb{C}$.
- 1) Démontrer que $P(z)$ admet deux racines imaginaires pures.
 - 2) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation, puis donner les solutions sous forme exponentielle.
 - 3) Le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$. On note $a = -i$; $b = i$; $c = 1 - i$.
 - a) Faire une figure que l'on complètera au fur et à mesure. On notera A, B et C les points d'affixes respectives a, b et c .
 - b) Calculer $\frac{a-b}{a-c}$, puis en déduire la nature du triangle ABC .
 - c) Soit C l'image du point D par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$. Calculer l'affixe du point D .
 - d) E est l'image du point D par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$. Déterminer l'affixe du point E .
 - e) Pour quelles valeurs de n , c^n est-il un réel ?

N.B : Les parties A et B sont indépendantes.