

Exercice1 : (6 points)

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$. Soit A le point d'affixe i et B le point d'affixe $(-i)$.

Soit f l'application définie sur $\mathbb{C} - \{i\}$ par : $f(z) = \frac{1-iz}{z-i}$.

- 1) Vérifier que pour tout z de $\mathbb{C} - \{i\}$, $f(z) = -i + \frac{2}{z-i}$.
- 2) a) Démontrer que $(-i)$ n'a pas d'antécédent par f .
b) Déterminer les antécédents de 0 et de i par f .
- 3) A tout point M différent de A, d'affixe z on associe le point M' d'affixe z' tel que $z' = f(z)$.
1) Déterminer que pour tout point M différent de A, le produit des longueurs AM et BM' est égal à 2 ($AM \times BM' = 2$).
- 4) Démontrer que lorsque M décrit le cercle (C) de centre A et de rayon 4, M' se déplace sur un cercle (C') dont on précisera le centre et le rayon.
a) Déterminer l'ensemble (E) des points M(z) tels que $z - i$ soit un réel non nul.
b) Démontrer que lorsque M décrit (E), M' se déplace sur droite (Δ) que l'on précisera.
c) Lorsque M décrit (E), M' décrit-il toute la droite (Δ) ?
- 5) Déterminer l'ensemble des points M(z) tels que $f(z)$ soit un imaginaire pur non nul.

Exercice2 : (6 points)

- 1) Pour tout complexe z distinct de 1, on appelle A ; M et M' les points d'affixes respectives 1; z ; z^2 . Déterminer les points M tels que le triangle AMM' soit équilatéral.
- 2) Déterminer les racines cubiques du nombre complexe i sous forme trigonométrique et algébrique. En déduire la résolution dans $\mathbb{C}$ de l'équation : $[(1 - 2i)z]^3 - i = 0$.
- 3) Calculer le module et un argument du nombre complexe suivant : $u = \frac{1}{1+itan\theta}$. (On discutera suivant les valeurs de θ).

Problème : (8 points)

A- Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{u}; \vec{v})$, unité graphique : 2 cm.

- 1) Soit le nombre $z_0 = 1 + i$.
a) Montrer que z_0 est solution de l'équation (E) définie par :

- (E): $z^3 - (7 + i)z^2 + 2(8 + 3i)z - 10(1 + i) = 0$.
- b) Résoudre l'équation (E) dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$.
 - 2) On considère les points A, B et C du plan, d'affixes respectives $1 + i$; $3 + i$; $3 - i$.
 - a) Calculer et écrire sous forme exponentielle $\frac{Z_A - Z_B}{Z_C - Z_B}$.
 - b) En déduire la nature du triangle ABC.
 - c) Placer dans le plan complexe $(O; \vec{u}; \vec{v})$ les points A, B et C et compléter la figure au fur et à mesure.
 - d) Soit (γ) le cercle circonscrit au triangle ABC. Déterminer l'affixe du centre G et le rayon r du cercle.
 - 3) Soit (Δ) l'ensemble des points M du plan d'affixe z vérifiant la relation : $|z - 1 - i| = |z - 3 + i|$.
 - a) Caractériser géométriquement l'ensemble (Δ) .
 - b) Justifier que le point F d'affixe $4 + 2i$ appartient à (Δ) .
 - c) Déterminer l'affixe du point E de (Δ) situé sur l'axe des imaginaires.
 - 4) Quelle est la nature exacte du quadrilatère CEAF ? Justifier votre réponse.
- B-** Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$.

Soient les nombres complexes $a = \frac{\sqrt{3}+1}{4} + \frac{i(\sqrt{3}-1)}{4}$ et $z_0 = 6 + 6i$.

On note A_0 le point d'affixe z_0 et pour tout entier naturel non nul, on désigne par A_n le point d'affixe z_n définie par $z_n = a^n z_0$.

- 1) a) Exprimer z_1 et a^2 sous forme algébrique. Ecris z_1 sous forme exponentielle et montrer que $a^2 = \frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{6}}$.
 - b) Exprimer z_3 et z_7 en fonction de z_1 et a^2 ; en déduire z_3 et z_7 sous forme exponentielle.
- 2) Pour tout entier naturel n, on pose $|z_n| = r_n$.
 - a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $r_n = 12 \cdot (\frac{\sqrt{2}}{2})^n$.
 - b) En déduire que la suite $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
 - c) Déterminer la limite de la suite (r_n) et interpréter géométriquement le résultat obtenu.

N.B : Les parties A et B sont indépendantes.