

ANNEE SCOLAIRE 2021 – 2022
DEVOIR DE MATHÉMATIQUES N°3

Classe : TSE

DUREE : 4 heures

COEF : 4

Prof : El hadj Mactar NIANGADO

Nombre de page : 2

Exercice 1 : (4 points)

Soit (V_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $V_1 = \frac{1}{2}$ et $V_{n+1} = \frac{n+1}{2n} V_n$

- 1) Donne la valeur des quatre premiers termes de la suite (V_n) .
- 2) a) Démontre que pour tout entier $n > 0$, on a : $V_n > 0$.
 b) Démontre que la suite (V_n) est décroissante.
 c) En déduire que la suite (V_n) est convergente.
- 3) Soit (U_n) la suite définie par : $U_n = \frac{V_n}{n}$, $\forall n > 0$.
 a) Prouve que la suite (U_n) est géométrique. Précise la raison et le premier terme.
 b) Exprime U_n puis V_n en fonction de n .
 c) Calcule $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n$.

Exercice 2 : (4 points)

Sur les quatre faces d'un dé pipé tétraédrique sont inscrits les nombres complexes : $z_0 = -2i$;
 $z_1 = -2 - 2i$; $z_2 = 1 - i$ et $z_3 = -1 + i\sqrt{3}$. On lance une fois ce dé.

La probabilité p_k pour que la face marquée z_k soit cachée est : $p_k = c|z_k|^2$, pour $k \in \{0;1;2;3\}$ et $k \in \mathbb{R}$.

- 1) a) Prouve que : $c = \frac{1}{18}$.
 b) Détermine p_k pour $k \in \{0;1;2;3\}$.
- 2) On désigne par X la variable aléatoire qui, au complexe inscrit sur la face cachée associe son unique argument appartenant à l'intervalle $[0;2\pi]$.
 a) Détermine les valeurs prises par X .
 b) Donne la loi de probabilité de X .
 c) Calcule l'espérance mathématique de X .

Problème : (12 points)

A-) Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$; $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 2\text{cm}$.

On considère la fonction dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et définie par : $f(x) = x - 4 + \frac{1}{4} \ln|x|$.

- 1) a) Calcule les limites aux bornes de l'ensemble de définition E de la fonction f .
 b) Démontre que f est strictement croissante sur chacun des intervalles $\left]-\infty; -\frac{1}{4}\right[$ et $]0; +\infty[$
 et strictement décroissante sur l'intervalle $\left]-\frac{1}{4}; 0\right[$.
 c) Dresse le tableau de variation de f .

2) Démontre que l'équation $x \in \mathbb{R}, f(x)=0$ admet une unique solution α telle que $3 < \alpha < 4$.

3) Démontre que : $\forall x \in]-\infty; 0[\cup]0; \alpha[, f(x) < 0$ et $\forall x \in]\alpha; +\infty[, f(x) > 0$.

B-) On considère la fonction h dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}^*, h(x) = x + 1 - \frac{31}{16}x^2 - \frac{1}{8}x^2 \ln|x| \\ h(0) = 1 \end{cases}$$

1) a) Démontre que h est dérivable en 0.

b) Démontre que : $\forall x \in \mathbb{R}^*, h'(x) = xf\left(\frac{1}{x}\right)$.

c) Démontre en utilisant la partie A-3) que : $\forall x \in]-\infty; 0[\cup]0; \frac{1}{\alpha}[, h'(x) > 0$ et

$$\forall x \in]\frac{1}{\alpha}; +\infty[, h'(x) < 0.$$

2) On note (Γ) la courbe représentative de la restriction de h à l'intervalle $\left[-1; \frac{3}{2}\right]$ dans le plan muni du repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$. Trace la tangente à (Γ) en son point d'abscisse 0 puis Construire la courbe (Γ) . (Tu prendras $\alpha = 3,6$)

3) λ est un nombre réel appartenant à l'intervalle $]0; 1[$.

a) En utilisant une intégration par parties, démontre que : $\int_{\lambda}^1 x^2 \ln(x) dx = -\frac{1}{9} + \frac{1}{9}\lambda^3 - \frac{1}{3}\lambda^3 \ln \lambda$.

b) On note $\mathcal{A}(\lambda)$ l'aire en centimètre carré de la partie du plan limitée par la courbe (Γ) , la droite de repère $(O; \vec{i})$ et les droites d'équation $x = \lambda$ et $x = 1$.

$$\text{Déduis-en de la question précédente que : } \mathcal{A}(\lambda) = \left(\frac{125}{36} - 4\lambda - 2\lambda^2 + \frac{91}{36}\lambda^3 + \frac{1}{6}\lambda^3 \ln \lambda \right) \text{cm}^2.$$

c) Calcule la limite de $\mathcal{A}(\lambda)$ quand λ tend vers 0 par valeurs supérieures.

C-) On se propose de calculer une valeur approchée de α à 0,01 près.

1) soit g la fonction dérivable sur l'intervalle $]0; +\infty[$ et définie par : $g(x) = 4 - \frac{1}{4} \ln(x)$.

a) Etudie les variations de g .

b) Démontre que l'image de l'intervalle $[3; 4]$ par g est contenue dans l'intervalle $[3; 4]$.

c) Démontre que α est l'unique solution de l'équation : $x \in]0; +\infty[, g(x) = x$.

2) On considère la suite (U_n) définie par : $\begin{cases} U_0 = 3 \\ \forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = g(U_n) \end{cases}$

a) Démontre par récurrence que, pour tout entier naturel n , $3 \leq U_n \leq 4$.

b) Démontre que, pour tout entier naturel n , $(U_n - \alpha)$ et $(U_{n+1} - \alpha)$ sont de signe contraires.

c) Démontre que, pour tout x élément de $[3; 4]$, on a : $|g'(x)| \leq \frac{1}{12}$.

$$\text{Déduis-en que, pour tout entier naturel } n, |U_{n+2} - U_{n+1}| \leq \frac{1}{12} |U_{n+1} - U_n| \text{ puis que } |U_{n+1} - U_n| \leq \frac{1}{12^n}$$

d) Démontre que, pour tout entier naturel n , $|U_n - \alpha| \leq \frac{1}{12^n}$.

Déduis-en une valeur approchée de α à 0,01 près.

-/-