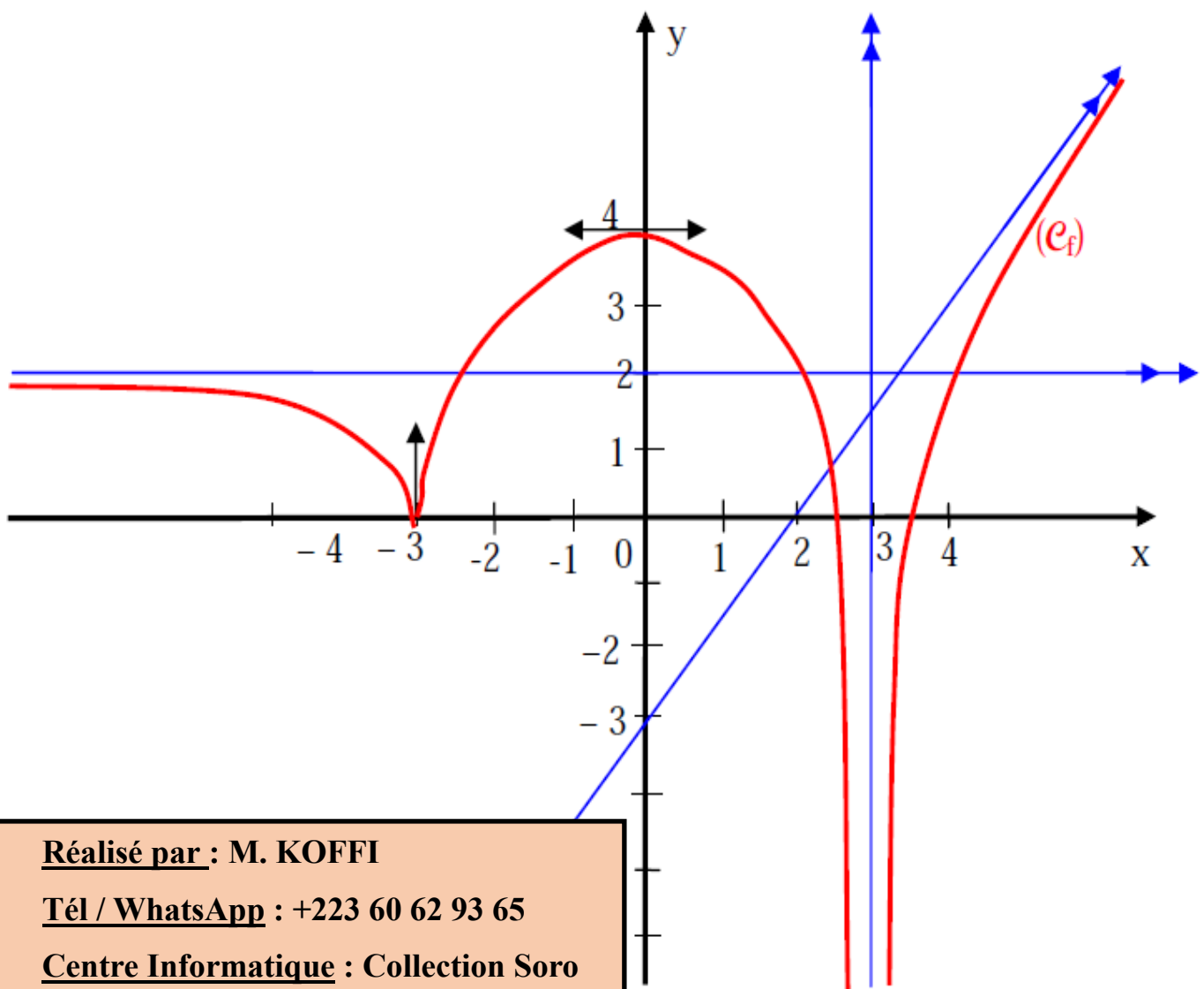


Recueil d'Épreuves des devoirs Maliens

**COLLECTION
KOFFIMATH**



Réalisé par : M. KOFFI

Tél / WhatsApp : +223 60 62 93 65

Centre Informatique : Collection Soro

Tél / WhatsApp : +229 95 20 25 49

LES EPREUVES DE TSE

DEVOIR SURVEILLE

**Année Scolaire :
2021-2022**

**Classe :
TSE**

**Devoir surveillé :
MATHEMATIQUES**

Durée : 3 Heures

Coef : 04

Exercice 1(04 pts)

1. Linéariser : $\cos^4(7x) \times \sin^3(5x)$
2. Ecrire sous forme trigonométrique le nombre complexe $t = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)^{2018}$
3. Résous dans $\mathbb{C}$, l'équation $z^4 = 8(1 - i\sqrt{3})$
4. Mettre sous forme trigonométrique $z_0 = 1 - e^{i\theta}$; $z_1 = 1 + e^{i\theta}$; $z_2 = 1 + e^{i3\theta}$; $Z = \frac{z_0}{z_1}$ et $Z' = z_0 \times z_1$ avec $\theta \in \mathbb{R}$ (On discutera suivant les valeurs de θ)

Exercice 2 (04 pts)

Soit α un nombre réel appartenant à $]0; \frac{\pi}{2}[$. On considère l'équation d'inconnue z complexe
(E) : $z^3 - (1 + 2\cos\alpha)z^2 + (1 + 2\cos\alpha)z - 1 = 0$

1. Résous dans $\mathbb{C}$, l'équation (E) sachant que 1 est une solution évidente
2. On désigne par z_1 et z_2 les autres solutions de l'équation (E) telles que $\text{Im}(z_2) < 0$ et $Z = \frac{1}{2}(z_1 - z_2) \times \left(\frac{1}{\sin\alpha}\right)$.

Détermine les racines quatrièmes de Z sous forme trigonométrique puis sous forme algébrique et représenter leur point image sur le cercle trigonométrique.

3. Préciser le module et un argument de z_1 et z_2 .

Problème(12 pt)

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé (O, I, J), on considère le polynôme complexe

$$f(z) = z^4 - 4z^3 + 30z^2 - 52z + 425 = 0$$

1. Montrer que si z_0 est solution de l'équation $f(z) = 0$ alors $\bar{z}_0$ est aussi solution
2. Calculer $f(-1 + 4i)$. Que peut-on déduire ?
3. En déduire la résolution de l'équation $f(z) = 0$ (On notera z_A la solution qui a ses parties réelle et imaginaire positives ; z_B celle qui a sa partie réelle négative et sa partie imaginaire positive ; z_C celle dont les parties réelles et imaginaire sont négatives et z_D la quatrième solution.
4. Soit A, B, C et D les points images des solutions z_A, z_B, z_C et z_D de l'équation $f(z) = 0$. Placer ces points dans le plan complexe puis en déduire la nature du triangle ABC puis celle du polygone ABCD.
5. Déterminer le périmètre puis l'aire de chacune des figures ABC et ABCD
6. a) Montrer que les points A, B, C et D sont sur un même cercle (Γ) dont-on précisera son centre et son rayon.
b) En déduire une équation cartésienne de (Γ).
7. Détermine l'abscisse du point G centre de gravité du triangle ABC.

8. On pose $Z = \frac{z - z_B}{z - z_A}$ avec z l'affixe du point M .
- a) Mettre Z sous forme algébrique puis préciser $\operatorname{Re}(Z)$ et $\operatorname{Im}(Z)$.
 - b) Déterminer et construire les ensembles des points $M(Z)$ du plan tels que :
 - i) $|Z| = 1$
 - ii) $|Z| = \frac{2}{3}$
 - iii) $\arg(Z) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi ; k \in \mathbb{Z}$

Ministère de l'Education Nationale		Académie d'Enseignement de Kati	
GROUPE SCOLAIRE AMADOU SIDIBE(GSAS)		LYCEE PRIVE DJINESSIRA COULIBALY (L.P.DJI.COUL)	
Tél : 20 71 99 37 / 76 49 67 10 / 50 02 92 93		Email : Ipdjicoul-info@yahoo.fr	Kalaban coro Sangha
DEVOIR SURVEILLE			Année Scolaire : 2021-2022
Classe : TSE	Devoir surveillé : MATHEMATIQUES	Durée : 3 Heures	Coef : 04

Exercice 1

.....(06 pts)

- Soit $n = \overline{21210}^4$
 - Ecrire, sans passer par le système décimal, n dans le système binaire
 - Ecrire n dans le système décimal
- Décompose 612 en produit de facteurs premiers puis détermine le nombre de diviseurs positifs de 612.
 - Détermine l'ensemble des diviseurs positifs de 612
 - Détermine les entiers naturels x et y tels que : $x^2 - y^2 = 612$
 - Après avoir trouvé des entiers naturels dont le carré est un diviseur de 612, détermine les couples $(a ; b)$ d'entiers naturels tels que $m^2 - 127d^2 = 612$ où $m = \text{PPCM}(a; b)$ et $d = \text{PGCD}(a; b)$
- Pour quelles valeurs de l'entier relatif n , le nombre $\frac{n^2+3n+1}{n+1}$ est-il entier relatif ?
- On veut entourer avec un nombre minimum d'arbres un champ rectangulaire de dimensions 396 m et 156 m. Les arbres seront régulièrement espacés, de plus il y aura un arbre à chaque sommet du rectangle.
Calcule :
 - la distance comprise entre deux arbres
 - le nombre d'arbres nécessaires pour entourer le champ

Exercice 2 (04 pts)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{u} ; \vec{v})$. On considère les points A, B et C d'affixes respectives $-i$, $-2i$ et $1-i$. A tout point M d'affixes $z = x + iy$, distinct de A, on associe le point M' d'affixe $z' = x' + iy'$ défini par : $z' = \frac{z^2}{z+i}$

- Détermine les affixes des points B' et C' associés respectivement aux points B et C

b) Montre que les points A, B' et C' sont alignés

c) Détermine la nature du triangle ACC'

2. a) Exprime x' et y' en fonction de x et y

b) Détermine et construis l'ensemble (Γ) des points M du plan tels que z' soit un imaginaire pur.

Problème(10 pts)

A) on considère l'équation d'inconnue z , $(E) : z^3 + (-1 - i)z^2 + 2(1 + 3i)z + 8 = 0$

1. Montre que l'équation (E) admet une solution imaginaire pure z_0 que l'on déterminera

2. Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation (E)

B) Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O ; \vec{u} ; \vec{v})$. Soient A, B et C

les points d'affixes respectives $z_A = 2i$; $z_B = 2 - 2i$ et $z_C = -1 + i$

1. a) place les points A, B et C

b) Détermine l'affixe z_D du point D pour que ADBC soit un parallélogramme. Place le point D

2. On pose $z = \frac{z_B - z_C}{z_A - z_C}$

a) Ecrire Z sous forme algébrique. En déduis la nature du triangle ABC.

b) Détermine l'affixe z_E du point E milieu de $[AB]$. Place le point E.

C) On considère l'équation $(E) : 17x - 29y = 6$ avec $(x; y) \in \mathbb{Z}^2$

1. a) En utilisant l'algorithme d'Euclide, détermine un couple $(u; v) \in \mathbb{Z}^2$ solution de l'équation : $17u - 29v = 1$. En déduire une solution particulière de l'équation (E)

b) Détermine toutes les solutions de l'équation (E)

c) En déduire la solution dans $\mathbb{Z}$ du système : $\begin{cases} a \equiv 2[17] \\ a \equiv 8[29] \end{cases}$ puis détermine un entier naturel $r \in]200; 300[$ tel que $a \equiv r[493]$

2. Un général décide de compter ses soldats. Il leur ordonne de se ranger en rang de 29 : il reste 2 soldats. Il leur ordonne de se ranger en rang de 17 : il reste 8 soldats. Sachant que la troupe est constituée de moins de 300 soldats. Combien y a-t-il de soldats ?

NB : Les parties A), B) et C) sont indépendantes

DEVOIR SURVEILLE DE LA DEUXIEME PERIODE

**Année Scolaire :
2021-2022**

**Classe : Devoir surveillé :
TSE MATHEMATIQUES**

Durée : 3 Heures

Coef : 04

Exercice 1(05 pts)

- On considère dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation (E) : $11x + 8y = 79$
 - Montrer que si $(x; y)$ est solution de (E) alors $y \equiv 3[11]$
 - Résoudre alors l'équation (E)
- Le prix total de 41 pièces détachées réparties en trois lots est de 48.000 F. Le prix d'une pièce du 1^{er} lot est 4.800 ; le prix d'une pièce du 2^{ème} lot est 3.600f et le prix d'une pièce du 3^{ème} lot est 400F.
☞ Déterminer le nombre de pièces de chaque lot.

Exercice 2(05 pts)

Les points A, B, M et M' du plan complexe ont pour affixes respectives : $2 - 4i$, $-i$, z et z' avec $z' = \frac{-iz-2+4i}{z+i}$

- Exprimer les coordonnées $(x'; y')$ de M' en fonction de celles $(x; y)$ de M.
- Déterminer et représenter l'ensemble des points M tels que :
 - z' soit réel
 - z' soit imaginaire pur
- On pose $Z = z + i$ et $Z' = z' + i$. Vérifier que $ZZ' = -3 + 4i$ puis calculer $|ZZ'|$
- Déterminer l'ensemble des points M' lorsque M décrit un cercle de centre B et de rayon $r > 0$
 - Déterminer r pour que M et M' soient sur le même cercle

Problème(10 pts)

- A.
- Démontrer que l'équation : $x^3 + 3x^2 + 10x + 5 = 0$ a une unique réelle x_0 . Vérifier que $] -0,59; -0,58[$ est un encadrement de x_0
 - On considère la fonction f définie par $f(x) = \frac{x^3+3x^2+10x+5}{(x+1)^2}$
 - Quel est son ensemble de définition ?
 - Etudier les variations de f puis dresser son tableau de variation
 - Déterminer les réels a, b, c et d tels que pour tout x élément de son ensemble de définition, $f(x) = ax + b + \frac{cx+d}{(x+1)^2}$. En déduire que la courbe représentative (C) de f admet une asymptote oblique (Δ) dont on précisera une équation.
 - Etudier la position relative de (C) et (Δ)

- b) Tracer la courbe (C) et ses asymptotes dans le plan muni d'un repère orthonormé et donner une équation de la tangente à (C) en son point d'abscisse $x_1 = -2$
4. a) Montrer que la restriction g de f à l'intervalle $I =]1; +\infty[$ est une bijection de I sur un intervalle J à préciser.
- b) Tracer la courbe de la bijection réciproque g^{-1} dans le même repère que (C)
- c) Calculer $g(3)$ et en déduire le coefficient directeur de la tangente à la courbe de g^{-1} au point d'abscisse $\frac{89}{16}$
- B) On considère la fonction h définie sur l'intervalle $L =]2; +\infty[$ par $h(x) = \frac{x^3 - 4x + 2}{(x-2)^2}$
1. Déterminer les nombres réels a et b tels que $h(x) = ax + \frac{b}{(x-2)^2}$, pour tout x de L .
 2. En déduire l'ensemble des primitives de h sur L
- C) Soit la fonction k définie par $k(x) = \sin x - \frac{2}{3}\sin^3 x$
1. a) Montrer que la droite d'équation $x = \frac{\pi}{2}$ est un axe de symétrie à la courbe de k
b) Etudier la parité et la périodicité de k
 2. Etudier les variations de k sur son ensemble d'étude puis tracer sa courbe sur l'intervalle $[-\pi; \pi]$

NB : Les parties A), B) et C) sont indépendantes

COMPOSITION DE LA PREMIERE PERIODE

**Année Scolaire :
2021-2022**

**Classe : Devoir surveillé :
TSE MATHEMATIQUES**

Durée : 4 Heures

Coef : 04

Exercice 1(06 pts)

1. Soit $N = \overline{FCC}^{16}$ avec $F = 15$ et $C = 12$
 - a) Ecrire, sans passer par le système décimal, N dans le système binaire
 - b) Ecrire N dans le système décimal
2.
 - a) Montre que 337 est un nombre premier
 - b) Décompose 4044 en produit de facteurs premiers puis détermine le nombre de diviseurs positifs de 4044.
 - c) Détermine l'ensemble des diviseurs positifs de 4044
 - d) Détermine les entiers naturels n et p tels que : $n^2 - p^2 = 4044$
 - e) Après avoir trouvé des entiers naturels dont le carré est un diviseur de 4044, détermine les couples $(x ; y)$ d'entiers naturels tels que $m^2 - 3907d^2 = 4044$ où $m = PPCM(x; y)$ et $d = PGCD(x; y)$
3. Résoudre dans $\mathbb{Z}/19\mathbb{Z}$:
 - a) $\dot{7}x = \dot{1}$
 - b) $x^2 + \dot{3}x + \dot{15} = \dot{0}$

Exercice 2 (04 pts)

1. Calcule les limites suivantes :
 - a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - 3x})$
 - b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x + 1} - \sqrt{x - 2})$
 - c) $\lim_{x \rightarrow -1} \left(\frac{\sqrt[3]{x+2}-1}{x+1} \right)$
 - d) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\tan x - \sin x}{\sin x (\cos 2x - \cos x)} \right)$
 - e) $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{x^4 - 16}{x^3 - 3x - 2} \right)$
 - f) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \left(\frac{1 - 2\sin x}{6x - \pi} \right)$
2. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 3 + \cos x}$
 - a) Montre que : $\forall x \in \mathbb{R}, \frac{x^2}{x^2 + 4} \leq f(x) \leq \frac{x^2}{x^2 + 2}$
 - b) En déduis : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

Problème(10 pts)

- D) On considère l'équation (E): $19x - 7y = -2$ avec $(x; y) \in \mathbb{Z}^2$
3. a) En utilisant l'algorithme d'Euclide, détermine un couple $(u; v) \in \mathbb{Z}^2$ solution de l'équation : $19u - 7v = 1$. En déduire une solution particulière de l'équation (E)
b) Détermine toutes les solutions de l'équation (E)
c) En déduire la solution dans $\mathbb{Z}$ du système : $\begin{cases} 7a \equiv 4[19] \\ 5a \equiv 6[7] \end{cases}$
 4. Un général décide de compter ses soldats. Il leur ordonne de se ranger en rang de **19** : il reste **6 soldats**. Il leur ordonne de se ranger en rang de **7** : il reste **4 soldats**. Sachant que la troupe est constituée de moins de **200 soldats**. **Combien y a-t-il de soldats**
- E) Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$ d'unité graphique 1 cm. On considère l'équation d'inconnue z , (E) : $z^3 + (1 - 3i)z^2 + (5i - 6)z + 14 + 8i = 0$
3. Montre que l'équation (E) admet une solution imaginaire pure z_0 que l'on déterminera
 4. Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation (E)
- F) Soient A, B et C les points d'affixes respectives $z_A = -3 + 2i$; $z_B = 2i$ et $z_C = 2 - i$
3. Place les points A, B et C
 4. Soit D d'affixe $z_D = -3 - i$. Calcule AB, AD et BD. En déduis la nature du triangle ABD.
 5. Détermine la nature du polygone ABCD. Calcule le périmètre et l'aire de ce polygone.
 6. A tout point M d'affixe z différent de $2i$ on associe le point M' d'affixe z' tel que $z' = \frac{iz - 4 + 2i}{z - 2i}$. Soit le point E d'affixe i .
 - a) Montre que pour tout $z \neq 2i$ on a : $(z - 2i)(z' - i) = -6 + 2i$. En déduis $BM \times EM' = 2\sqrt{2}$
 - b) Détermine l'ensemble des points M' lorsque M décrit le cercle de centre B et de rayon $\sqrt{2}$

NB : Les parties A), B) et C) sont indépendantes

DEVOIR SURVEILLE DE LA DEUXIEME PERIODE

**Année Scolaire :
 2021-2022**

**Classe :
 TSE**

**Devoir surveillé :
 MATHEMATIQUES**

Durée : 3 Heures

Coef : 04

Exercice 1(06 pts)

- I. 1. Calculer le module du nombre complexe $a = -21 + 20i$
 2. Déterminer les racines carrées de a .
 3. Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation $iz^2 + iz = 5 + 5i$
- II. Soit $\varphi : \mathbb{C} - \{-1; 1\} \rightarrow \mathbb{C}$

$$z \mapsto \frac{2z}{z^2 - 1}$$
1. Démontrer que $\forall \theta \in]0; \pi[$ le nombre complexe $\varphi(e^{i\theta})$ est un imaginaire pur puis déterminer son module et un argument.
 2. a) Montrer que $\varphi(z) = \frac{2z(\bar{z}^2 - 1)}{|z^2 - 1|^2}$
 b) On pose $z = x + iy$ et $2z(\bar{z}^2 - 1) = X + iY$. Calculer X et Y en fonction de x et y .
 c) Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{u}; \vec{v})$. Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que $\varphi(z)$ soit imaginaire pur.
 3. Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation $\varphi(z) = \frac{1}{2}i$

Exercice 2(06 pts)

1. Dans une classe TSE de moins de 40 élèves, la moyenne des notes des filles est 12 et celle des garçons est 10 et la moyenne générale de la classe est 11,28. quel est l'effectif de classe ?
 2. Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, l'équation : $6x - 13y = 5$
 3. a) Résoudre dans $\mathbb{N}$, l'équation : $2n + 3 \equiv 0[n + 1]$
 b) Détermine l'entier naturel n tel que $A = \frac{2n-1}{2n+3}$ soit irréductible.
 4. Démontrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N} : 5^{2n} - 3^n$ est divisible par 11.

Problème(08 pts)

- A) Soit la fonction numérique définie par $f(x) = 2\sqrt{x} - x$ et (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé
1. Etudier les variations de f puis tracer (C)
 2. On désigne par g la restriction de f à l'intervalle $[1; +\infty[$
 a) Montrer que g réalise une bijection de $[1; +\infty[$ sur un intervalle I que l'on précisera.
 b) Tracer la courbe représentative (C') de g^{-1} dans le même repère que (C)
 c) Donner une équation de la tangente (T) à (C') au point d'abscisse $x_0 = \frac{3}{4}$
- $$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$
- B) Soit la fonction
$$x \mapsto \frac{|x^2 + x| + 1}{|x| + 1}$$
1. Déterminer Df
 2. Ecrire $f(x)$ sans la valeur absolue
 3. Etudier la continuité et la dérivabilité de f en -1 et 0.
 4. Etudier les variations de f

Ministère de l'Éducation Nationale		Académie d'Enseignement de Kati	
GROUPE SCOLAIRE AMADOU SIDIBE(GSAS)		LYCEE PRIVE DJINESSIRA COULIBALY (L.P.DJI.COUL)	
Tél : 20 71 99 37 / 76 49 67 10 / 50 02 92 93		Email : lpdjicoul-info@yahoo.fr	Kalaban coro Sangha
DEVOIR SURVEILLE			Année Scolaire : 2020-2021
Classe : TSE	Devoir surveillé : MATHEMATIQUES	Durée : 3 Heures	Coef : 04

Exercice 1(04 pts)

Soit f la fonction numérique de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{12x^2+12x+1}{(2x+1)^3}$

- Déterminer l'ensemble de définition de f (1 pt)
- détermine les réels a et b tels que : $\forall x \in Df; f(x) = \frac{a}{2x+1} + \frac{b}{(2x+1)^3}$ (1 pt)
- a) en déduis une primitive F de f sur $]-\infty; -\frac{1}{2}[$ (1 pt)
- b) calcule $A = \int_{-2}^{-1} f(x)dx$ (1 pt)

Exercice 2 (06 pts)

I. On donne les intégrales : $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{(\sin x + \cos x)^3} dx$ et $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{(\sin x + \cos x)^3} dx$

- Calcule $I - J$ (1 pt)
- Soit g la fonction numérique définie sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ par $g(x) = \frac{\sin x}{\sin x + \cos x}$
Calcule $g'(x)$ puis en déduis la valeur exacte de $I + J$ (1,5 pts)
- En déduis les valeurs exactes de I et J (1 pt)
- II. Soit l'intégrale $K_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x^{n+1} \cos 2x) dx ; n \in \mathbb{N}$
 - Calcule K_0 à l'aide d'intégration par parties (1 pt)
 - A l'aide d'une double intégration par parties, montre que :
 $\forall n \geq 2, K_n = -\frac{1}{4}(n+1)\left(\frac{\pi}{2}\right)^n - \frac{1}{4}n(n+1)K_{n-2}$. En déduis K_2 et K_4 (1,5 pts)

Problème(11 pts)

1. Soit p le polynôme tel que $p(x) = 3x^3 + 2x^2 - 5$
 - a) Vérifier que $p(x) = (x - 1)(3x^2 + 5x + 5)$ (0,5 pt)
 - b) Etudier le signe de $p(x)$ suivant les valeurs de x (0,5 pt)
2. Soit g la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par $g(x) = x^3 + x^2 - 2 - 5\ln x$. Etudier les variations de g et en déduire le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x . (1 pt)
3. Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2 + 2x + \frac{14+10\ln x}{x}$.
 - a) Déterminer l'ensemble de définition D de f puis calculer les limites de f aux bornes de D (1 pt)
 - b) On désigne par (C_f) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}; \vec{j})$ avec 5 cm en abscisse et 0,5 cm sur l'axe des ordonnées.
Etudier les branches infinies de (C_f) (1 pt)
 - c) Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation (1 pt)
 - d) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans $[0,2; 0,5]$ et donner une valeur approchée à 10^{-1} de α (1 pt)
 - e) Tracer (C_f) dans l'intervalle $[-1; 2]$ (1 p)
4.
 - a) Calculer $f(x) - (x^2 + 2x)$ (0,5 pt)
 - b) Calculer la limite en $+\infty$ de $f(x) - (x^2 + 2x)$ (0,5 pt)
 - c) Etudier le signe de $f(x) - (x^2 + 2x)$ (0,5 pt)
 - d) Donner une interprétation graphique des résultats de a) et b) (0,5 pt)
 - e) On désigne par (P) la parabole d'équation $y = x^2 + 2x$
 - f) Tracer (P) dans le même repère que (C_f) (1 pt)

Fin

Ministère de l'Education Nationale		Académie d'Enseignement de Kati	
GROUPE SCOLAIRE AMADOU SIDIBE(GSAS)		LYCEE PRIVE DJINESSIRA COULIBALY (L.P.DJI.COUL)	
Tél : 20 71 99 37 / 76 49 67 10 / 50 02 92 93		Email : lpdjicoul-info@yahoo.fr	Kalaban coro Sangha
DEVOIR SURVEILLE DE LA DEUXIEME PERIODE			Année Scolaire : 2021-2022
Classe : TSE	Devoir surveillé : MATHEMATIQUES	Durée : 3 Heures	Coef : 04

Exercice 1(04 pts)

Soit la fonction f définie par $f(x) = 2 \sin x + 6 \sin^3 x$ et on pose $F(x) = a \cos x + b \cos^3 x$ avec $x \in \mathbb{R}$

1. Trouver les réels a et b tels que F soit une primitive de f
2. Calcule $H = \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x) dx$

Exercice 2

.....(06 pts)

A) On donne $T = \int_0^{\pi} (3x + 7) \cos^2(5x) dx$ et $L = \int_0^{\pi} (3x + 7) \sin^2(5x) dx$

1. Calcule $T + L$ et $T - L$
2. Déduis-en les valeurs exactes de T et L

B) Trouve les primitives des fonctions définies ci-dessous

1. $f(x) = \sin x \cos^2 x$
2. $g(x) = x^4 (\sqrt[3]{17x^5 + 2})$

Problème(10 pts)

Partie A

Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{2x^3 + 5x^2 - 4x - 11}{(x+2)^2}$, (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J) unité graphique 1 cm.

1. Trouve l'ensemble de définition Df de f
2. Calcule les limites aux bornes de Df de f
3. Trouve les trois réels a , b et c tels que $\forall x \in \mathbb{R}$, on a : $f(x) = ax + b + \frac{c}{(x+2)^2}$
4. Trouve les équations des asymptotes à (C)
5. On désigne par (D) l'asymptote non parallèle aux axes du repère. Etudie la position relative de (C) et (D)
6. Calcule la dérivée f' de la fonction f puis étudier son signe
7. Dresse le tableau de variation de f
8. Trace (C) et ses asymptotes
9. Calcule l'aire du domaine plan limité par la courbe (C) , la droite (D) et les droites d'équations $x = 2$ et $x = 3$

Partie B

Pour tout entier naturel $n \geq 0$, on pose $I_n = \int_0^1 x^n \sqrt{7x+2} \, dx$

1.
 - a) Calcule I_0
 - b) Calcule I_1 à l'aide d'une intégration par parties
2. A l'aide d'intégration par parties montre que $\forall n \geq 1$, on a : $(14n+21)I_n + 4nI_{n-1} = 54$
3. Calcule I_2 ; I_3 et I_4
4. Comparer x^{n+1} et x^n lorsque $0 \leq x \leq 1$. Dédus-en que la suite (I_n) est décroissante
5.
 - a) En procédant par encadrement, établis que : $\frac{\sqrt{2}}{n+1} \leq I_n \leq \frac{3}{n+1}$
 - b) En déduire la limite de I_n en $+\infty$
6.
 - a) Démontre que $\forall x \in [0 ; 1]$, on a : $0 \leq 3 - \sqrt{7x+2} \leq \frac{7}{2\sqrt{2}}(1-x)$
 - b) Dédus-en du résultat précédant que : $\left(\frac{3}{n+1} - \frac{7}{2\sqrt{2}}\right)\left(\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right) \leq I_n \leq \frac{3}{n+1}$
 - c) Détermine la limite de la suite (nI_n) en $+\infty$

NB : Les parties A) et B) sont indépendantes

DEVOIR SURVEILLE

**Année Scolaire :
2021-2022**

**Classe : TSE Devoir surveillé :
MATHEMATIQUES**

Durée : 3 Heures

Coef : 04

Exercice 1(04 pts)

On considère le nombre complexe $z = \sqrt{3} + i$

- 1) Comment choisir l'entier n pour que z^n soit un imaginaire pur ?
- 2) Soit U_1 et U_2 les deux nombres complexes distincts tels que $U_1^2 = U_2^2 = z$. On notera U_1 celui dont la partie réelle est positive.
 - a) Quels sont les modules de U_1 et U_2 ?
 - b) Détermine les arguments de U_1 et U_2 .
 - c) On pose $U_1 = x + iy$ avec x et y des réels. Calculer x et y puis en déduire la valeur exacte de $\cos \frac{\pi}{12}$ et de $\sin \frac{\pi}{12}$.

Exercice 2(06 pts)

Les deux parties sont indépendantes

- A) Soit l'application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par $f(z) = z^4 - \sqrt{2}z^3 - 4\sqrt{2}z - 16$
- 1) Trouver les réels a , b et c tels que $f(z) = (z^2 + 4)(az^2 + bz + c)$.
 - 2) En déduire l'ensemble des solutions de l'équation $f(z) = 0$
 - 3) Placer dans le plan rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$, les points images A, B, C des solutions de l'équation $f(z) = 0$.
- B) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $(z^2 + 3z)^2 + (3z + 5)^2 = 0$

Problème(10 pts)

Le plan P est rapporté à un repère orthonormé. On considère les points I et A d'affixes respectives 1 et -2. Le point K est le milieu de $[IA]$. On appelle (C) le cercle de diamètre IA .

- 1) Soit B le point d'affixe b où $b = \frac{1+4i}{1-2i}$. Ecrire b sous forme algébrique et montrer que B appartient au cercle (C) .
- 2) Soit D le point du cercle (C) tel que $(\widehat{KI, KD}) = \frac{\pi}{3}$ et soit d d'affixe D .
 - a) Quel est le module de $d + \frac{1}{2}$?
 - b) Donner un argument de $d + \frac{1}{2}$. En déduire d .
 - c) Détermine le réel a vérifiant l'égalité $\frac{1+2ai}{1-ai} = \frac{1}{4} + \frac{3\sqrt{3}}{4}i$
- 3) Soit x un réel non nul et M le point d'affixe $m = \frac{1+2ix}{1-ix}$. On pose $z = \frac{m-1}{m+2}$. Calculer z et en déduire la nature du triangle AIM .
- 4) Soit N un point, différent de A , du cercle (C) et n son affixe. Démontrer qu'il existe un réel y tel que $n = \frac{1+2iy}{1-iy}$

Ministère de l'Éducation Nationale		Académie d'Enseignement de Kati	
GROUPE SCOLAIRE AMADOU SIDIBE(GSAS)		LYCEE PRIVE DJINESSIRA COULIBALY (L.P.DJI.COUL)	
Tél : 20 71 99 37 / 76 49 67 10 / 50 02 92 93		Email : lpdjicoul-info@yahoo.fr	Kalaban coro Sangha
DEVOIR SURVEILLE			Année Scolaire : 2020-2021
Classe : TSE	Composition de : MATHEMATIQUES	Durée : 3 Heures	Coef : 04

Exercice 1

1. Dans chacun des cas suivants, déterminer le domaine de définition :

$$f(x) = \ln x^2 ; g(x) = \ln[x(x+1)] ; h(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x^2-x-2}} + \frac{\ln|x^2+x|}{\ln x+3} \text{ et } k(x) = \ln(\cos x)$$

2. Résoudre les systèmes suivants :

a)
$$\begin{cases} e^{x+1} \cdot e^{y-2} = 2 \\ \ln x + \ln y = \ln(x-1) + \ln(y-1) \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 13 \\ \ln x + \ln y = \ln 6 \end{cases}$$

3. Soit f la fonction numérique à variable réelle définie par $f(x) = \frac{x^3 + 2x + 2}{1-x^2}$

- a) Déterminer l'ensemble de définition Df de f .

- b) Déterminer les réelles a , b , et c tels que pour tout x de Df on ait : $f(x) = ax +$

$$\frac{b}{1-x} + \frac{c}{1+x}$$

- c) En déduire l'ensemble des primitives de f sur Df

Exercice 2

Soit (E) l'équation différentielle : $y'' + 2y' + y = 0$.

- Résoudre (E)
- Soit (E') l'équation différentielle : $y'' + 2y' + y = x + 3$. Déterminer les réelles a et b tels que la fonction h définie par : $h(x) = ax + b$ soit solution de (E').
- Démontrer que g est solution de (E') si et seulement si la fonction $(g - h)$ est solution de (E).
 - Résoudre alors (E')
 - Déterminer la solution f de (E) telle que $f(0) = 2$ et $f'(0) = -1$

Problème

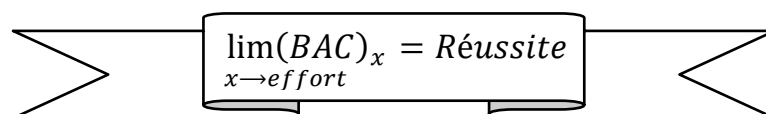
A- Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie par : $f(x) = -\frac{x}{2} + \ln \left| \frac{x-1}{x} \right|$

1. Déterminer l'ensemble de définition de f .
2. Etudier les variations de f .
3. Soit (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$. (Unité 2 cm). Montrer que (C) admet une asymptote oblique dont on précisera l'équation, puis la position de (C) par rapport à l'asymptote oblique.
4. Montrer que le point $I\left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{4}\right)$ est centre de symétrie pour (C).
5. Donner une équation de la tangente en I à (C).
6. Construire (C).

B- Soit φ la fonction définie par $\varphi(x) = (x^2 + x + 1)e^{-x} - 1$

- 1) Déterminer les limites de $\varphi(x)$ sur D φ .
Interpréter graphiquement le résultat de $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x)$
- 2) Calculer $\varphi'(x)$ et étudier son signe puis dresser le tableau de variation de φ
- 3) Démontrer que l'équation $\varphi(x) = 0$ admet deux solutions sur $\mathbb{R}$, dont l'une notée α est dans $[1; +\infty[$. Vérifier que $1,79 < \alpha < 1,80$.
- 4) En déduire le signe de $\varphi(x)$ sur $\mathbb{R}$.

NB : les questions A et B sont indépendantes



COMPOSITION DE LA PREMIERE PERIODE

Classe TSE

Exercice 1

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On donne $A(4 + 2i)$, $B(-2 - i)$ et M' d'affixe $z = \frac{z-4-2i}{z+2+i}$.

1. Interprète géométriquement $|z|$ et $\arg(z)$
2. Détermine et construis :
 - a) l'ensemble (E) des points M d'affixe z tels que $|z| = 1$
 - b) l'ensemble (Γ) des points M d'affixe z tels que z soit imaginaire pur
3. Calcule $\left(\frac{z-4-2i}{z+2+i} - 1\right)(z + 2 + i)$. En déduire $|z - 1||z + 2 + i|$
4. Démontre que si M décrit le cercle (C) de centre B et de rayon $\sqrt{5}$ alors M' décrit un cercle que l'on précisera.
5. On donne $AM = 2\sqrt{5}$, $BM = \sqrt{5}$ et $\arg(\overrightarrow{BM}; \overrightarrow{AM}) \equiv \frac{\pi}{3}$, donne la forme algébrique de z .

Exercice 2

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

1. Calcule $(1 - i)^2$ et $(1 + i)^2$
2. On considère l'équation (E) définie dans $\mathbb{C}$ par : $z^4 - 14iz^2 + 32 = 0$
 - a) Montre que si le complexe α est solution de (E) alors $-\alpha$ est aussi solution de (E)
 - b) Vérifie que pour tout nombre complexe z , on a : $z^4 - 14iz^2 + 32 = (z^2 + 2i)(z^2 - 16i)$
3. En utilisant les questions précédentes, résous dans $\mathbb{C}$ l'équation (E). On désignera par z_1, z_2, z_3 et z_4 de l'équation (E). z_1 et z_2 les solutions de parties imaginaires positives telles que $|z_1| < |z_2|$; z_3 et z_4 les solutions de parties imaginaires négatives telles que $|z_3| < |z_4|$
4. On note M_1, M_2, M_3 et M_4 les points d'affixes respectives z_1, z_2, z_3 et z_4
 - a) Représente les points M_1, M_2, M_3 et M_4 dans le plan complexe $(O, \vec{u}, \vec{v})$.
 - b) Quelle est la nature du quadrilatère $M_1M_2M_3M_4$? Justifie la réponse.

Problème

5. Soit $n = \overline{21210}^4$
 - c) Ecrire, sans passer par le système décimal, n dans le système binaire
 - d) Ecrire n dans le système décimal
6. a) Décompose 612 en produit de facteurs premiers puis détermine le nombre de diviseurs positifs de 612.
 - b) Détermine l'ensemble des diviseurs positifs de 612
 - c) Détermine les entiers naturels x et y tels que : $x^2 - y^2 = 612$
 - d) Après avoir trouvé des entiers naturels dont le carré est un diviseur de 612, détermine les couples $(a; b)$ d'entiers naturels tels que $m^2 - 127d^2 = 612$ où $m = \text{PPCM}(a; b)$ et $d = \text{PGCD}(a; b)$
7. Pour quelles valeurs de l'entier relatif n , le nombre $\frac{n^2+3n+1}{n+1}$ est-il entier relatif ?

8. On veut entourer avec un nombre minimum d'arbres un champ rectangulaire de dimensions 396 m et 156 m. Les arbres seront régulièrement espacés, de plus il y aura un arbre à chaque sommet du rectangle.

Calcule :

- c) la distance comprise entre deux arbres
- d) le nombre d'arbres nécessaires pour entourer le champ

Exercice 1(06 pts)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$ d'unité graphique 1 cm. On considère dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation (E) d'inconnue z suivant : $z^3 + (-8 + i)z^2 + (17 - 8i)z + 17i = 0$

Partie A

1. Montrer que $-i$ est solution de (E).
2. Détermine les réels a, b, c tels que :
 $z^3 + (-8 + i)z^2 + (17 - 8i)z + 17i = (z + i)(az^2 + bz + c)$
3. Résous l'équation (E) dans l'ensemble des nombres complexes.

Partie B

Soient A, B et C les points d'affixes respectives $4 + i$; $4 - i$ et $-i$.

1. Place les points sur une figure que l'on complètera dans la suite de l'exercice.
2. Soit r l'application du plan dans lui-même qui, à tout point M d'affixe z , associe le point M' d'affixe z' telle que $z' = iz - 2i + 2$. Le point Ω est le point d'affixe 2. On appelle S l'image de A par r . Calcule l'affixe s de S.
3. Démontre que les points B, A, S et C appartiennent à un même cercle (C) dont on déterminera le centre et le rayon puis trace (C).
4. A tout instant M d'affixe $z \neq 2$, on associe le point M' d'affixe : $z' = \frac{iz+10-2i}{z-2}$.
 - a) Détermine les affixes des points A', B' et C' associés respectivement aux points A, B et C.
 - b) Vérifier que A', B' et C' appartiennent à un cercle (C') de centre P, d'affixe i puis détermine son rayon et trace (C').
 - c) Pour tout nombre complexe $z \neq 2$, exprime $|z' - i|$ en fonction de z .
 - d) Soit M un point d'affixe z appartenant au cercle (C).

Démontre que $|z' - i| = 2\sqrt{5}$

- e) En déduis à quel ensemble appartiennent le point M' associés aux points du cercle (C).

Exercice 2(04 pts)

- I. On considère l'équation (E) : $8x + 5y = 1$ où (x, y) est un couple de nombre naturels.
- a) Donne une solution particulière de l'équation (E).

b) Résous l'équation (E).

1. Soit N un entier naturel tel qu'il existe un couple (a, b) de nombres entiers vérifiant :

$$\begin{cases} N = 8a + 1 \\ N = 5b + 2 \end{cases}$$

a) Montre que le couple (a, b) est solution de (E).

b) Quel est le reste dans la division de N par 40 ?

2. a) Résous l'équation $8x + 5y = 100$, où (x, y) est un couple de nombre naturel relatifs.

b) Au VIII^e siècle, un groupe composé d'hommes et de femmes a dépensé 100 pièces de monnaie dans une auberge. Les hommes ont dépensé 8 pièces chacun et les femmes 5 pièces chacune.

Combien pouvait-il y avoir d'hommes et de femmes dans le groupe ?

II. On se propose de résoudre l'équation différentielle : (E) : $y' - 2y = \frac{-2}{1+e^{-2x}}$

1. Soit g une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et f la fonction définie par : $f(x) = e^{2x} \cdot g(x)$

Montre que f est solution de (E) si et seulement si $g'(x) = \frac{-2e^{-2x}}{1+e^{-2x}}$

2. En deduis toutes les solutions de (E).

Problème :(10 pts)

1. On définit la fonction g sur l'intervalle $]1; +\infty[$ par : $g(x) = 2x - (x - 1)\ln(x - 1)$

A. On admet le résultat suivant : $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = 0$. En déduis la limite de $g(x)$ lorsque x tend vers 1.

B. Calcule $g'(x)$ pour tout x appartenant à l'intervalle $]1; +\infty[$.

C. Résous l'inéquation : $1 - \ln(x - 1) > 0$, d'inconnue x appartenant à l'intervalle $]1; +\infty[$.

D. Etudie le sens de variation de g sur l'intervalle $]1; +\infty[$.

E. Montre que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique notée α dans l'intervalle $[e + 1; e^3 + 1]$ puis étudie le signe de $g(x)$ sur $]1; +\infty[$.

III. Soit φ la fonction définie sur l'intervalle $]1; +\infty[$ par $\varphi(x) = \frac{\ln(x^2+1)}{x}$

A. Détermine $\lim_{x \rightarrow 0} \varphi(x)$ et prouve que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = 0$

B. Calcule $\varphi'(x)$ et montre que $\varphi'(x)$ est du signe de $g(x^2)$ sur l'intervalle $]1; +\infty[$

C. Montrer que φ est croissante sur l'intervalle $]1; \sqrt{\alpha}]$ et décroissante sur $[\sqrt{\alpha}; +\infty[$

D. On définit la fonction f sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{\ln(e^{2x}-1)}{e^x}$

1. Vérifie que ; pour tout x appartenant à l'intervalle $]0; +\infty[$, on a : $f(x) = \varphi(e^x)$

2. En déduis :

a) La limite de $f(x)$ lorsque x tend vers 0 ;

b) La limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$;

c) Le sens de variation de f sur l'intervalle et le fait que f admet un maximum en $\ln(\sqrt{\alpha})$

3. Montre que, pour tout x de l'intervalle $]0; +\infty[$, $f(x) \leq \frac{2\sqrt{\alpha}}{\alpha-1}$

4. Reproduis et complète le tableau suivant en donnant des valeurs approchées à 10^{-2} près.

x	0,1	0,5	1	1,5	2	3
$f(x)$						

- ☞ Représente graphiquement f dans un repère orthogonal, d'unité 5 cm en abscisse, 10 cm en ordonnée. On prendra 10 comme valeur approchée de α

Exercice 1

.....(04 pts)

Soit la fonction f définie par $f(x) = 2 \sin x + 6 \sin^3 x$ et on pose $F(x) = a \cos x + b \cos^3 x$ avec $x \in \mathbb{R}$

3. Trouver les réels a et b tels que F soit une primitive de f
4. Calcule $H = \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x) dx$

Exercice 2

.....(06 pts)

C) On donne $T = \int_0^{\pi} (3x + 7) \cos^2(5x) dx$ et $L = \int_0^{\pi} (3x + 7) \sin^2(5x) dx$

3. Calcule $T + L$ et $T - L$
4. Déduis-en les valeurs exactes de T et L

D) Trouve les primitives des fonctions définies ci-dessous

3. $f(x) = \sin x \cos^2 x$
4. $g(x) = x^4 (\sqrt[3]{17x^5 + 2})$

Problème(10 pts)**Partie A**

Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{2x^3 + 5x^2 - 4x - 11}{(x+2)^2}$, (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J) unité graphique 1 cm.

10. Trouve l'ensemble de définition Df de f
11. Calcule les limites aux bornes de Df de f
12. Trouve les trois réels a , b et c tels que $\forall x \in \mathbb{R}$, on a : $f(x) = ax + b + \frac{c}{(x+2)^2}$
13. Trouve les équations des asymptotes à (C)
14. On désigne par (D) l'asymptote non parallèle aux axes du repère. Etudie la position relative de (C) et (D)
15. Calcule la dérivée f' de la fonction f puis étudier son signe
16. Dresse le tableau de variation de f
17. Trace (C) et ses asymptotes
18. Calcule l'aire du domaine plan limité par la courbe (C) , la droite (D) et les droites d'équations

$$x = 2 \text{ et } x = 3$$

Partie B

Pour tout entier naturel $n \geq 0$, on pose $I_n = \int_0^1 x^n \sqrt{7x+2} \, dx$

7.

c) Calcule I_0

d) Calcule I_1 à l'aide d'une intégration par parties

8. A l'aide d'intégration par parties montre que $\forall n \geq 1$, on a : $(14n + 21)I_n + 4nI_{n-1} = 54$

9. Calcule I_2 ; I_3 et I_4

10. Comparer x^{n+1} et x^n lorsque $0 \leq x \leq 1$. Déduis-en que la suite (I_n) est décroissante

11.

c) En procédant par encadrement, établis que : $\frac{\sqrt{2}}{n+1} \leq I_n \leq \frac{3}{n+1}$

d) En déduire la limite de I_n en $+\infty$

12.

d) Démontre que $\forall x \in [0 ; 1]$, on a : $0 \leq 3 - \sqrt{7x+2} \leq \frac{7}{2\sqrt{2}}(1-x)$

e) Déduis-en du résultat précédant que : $\left(\frac{3}{n+1} - \frac{7}{2\sqrt{2}}\right) \left(\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right) \leq I_n \leq \frac{3}{n+1}$

f) Détermine la limite de la suite (nI_n) en $+\infty$

NB : Les parties A) et B) sont indépendantes

Exercice 1

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$. On prendra 1 cm pour l'unité graphique. On considère l'application f du plan dans lui-même qui, à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' telle que : $z' = -(\sqrt{3} + i)z - 1 + i(1 + \sqrt{3})$.

1. Montre que f est une similitude directe dont le centre Ω a pour affixe i puis détermine le rapport et l'angle.
2. Soit M_0 le point d'affixe $z_0 = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{3}{4}i$.
 - a) Calcule ΩM_0 .
 - b) Donne une mesure en radians de l'angle $(\vec{u}; \overrightarrow{\Omega M_0})$.
3. On considère la suite de points $(M_n)_{n \geq 0}$, définie pour tout entier naturel n par $M_{n+1} = f(M_n)$. On note z_n l'affixe du point M_n .
 - a) Détermine les affixes des points M_1, M_2, M_3 et M_4 .
 - b) Montre par récurrence, pour tout entier naturel n , l'égalité : $z_n - i = 2^n e^{i\frac{7n\pi}{6}}(z_0 - i)$.
 - c) Pour tout entier naturel n , Calcule ΩM_n puis détermine le plus petit entier n tel que $\Omega M_n \geq 10^2$.

Exercice 2

On se propose de déterminer l'ensemble S des entiers relatifs n vérifiant le système : $\begin{cases} n \equiv 4[12] \\ n \equiv 3[11] \end{cases}$

1. a) On considère l'équation suivante : $(E): 12u + 11v = 1$
 - b) Sans exhiber une solution, justifier l'existence d'un couple d'entiers relatifs $(u; v)$ solution de (E) .
 - c) Déterminer un couple $(u_0; v_0)$ solution de (E) .
2. Montrer que pour tout couple $(u; v)$ vérifiant (E) , l'entier $3 \times 12u + 4 \times 11v$ appartient à S .
3. Soit n un entier relatif appartenant à S . On pose $n_0 = 3 \times 12u_0 + 4 \times 11v_0$
 - a) Démontrer que $n - n_0 \equiv 0[132]$
 - b) En déduire qu'un entier relatif n appartient à S si et si seulement s'il peut s'écrire sous la forme $n = 132k - 8$ où k est un entier relatif.
4. A l'occasion d'un colloque international de mathématique, Mamour a remis à Farba de l'argent avec lequel Farba achète des cartes de crédit téléphonique qu'il distribue aux participants. Très fin mathématicien, Farba dit à ses étudiant : « Avec l'argent que Mamour m'a remis, j'ai entre 800 et 1000 cartes de crédit de 1000 F. si je fais des lots de 12 cartes, il m'en resterait 4 et si je fais des lots de 11 cartes, il m'en resterait 3. Quelle somme d'argent ai-je dépensé ? »

Mettez-vous à la place des étudiants de Farba et répondez à la question.

Problème

Partie A : On se propose de résoudre l'équation différentielle $(E_1) : y'' + 2y' + y = 2e^{-x}$.

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation différentielle $(E_2) : y'' + 2y' + y = 0$ où y désigne une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.
2. a) Déterminer le réel a pour que la fonction u définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = ax^2e^{-x}$ soit solution de l'équation (E_1) .
b) Démontre que la fonction h est solution de (E_1) si et seulement si $(h - u)$ est solution de (E_2)
c) En déduire l'ensemble de solution de l'équation (E_1) .
3. Déterminer la fonction h solution de (E_1) telle que $h(0) = 0$ et $h'(0) = 2$.

Partie B : Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = (x^2 + 2x)e^{-x}$ et (C_h) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$ d'unité graphique 1 cm.

1. Étudie les variations de h .
2. Étudie les branches infinies puis construis la courbe (C_h)
3. Calcule $I = \int_0^1 h(x)dx$ puis donne l'aire de la position délimitée par la courbe (C_h) ; l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$

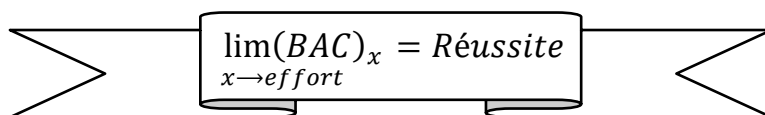
Partie C : On considère la fonction g définie sur $]-\infty; 0[$ par $g(x) = 1 - x + x \ln|x|$

1. Étudie les variations de g .
2. Montre que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in]-4; -3[$
3. Déduis-en le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x .

Partie D : Soit f la fonction numérique définie par $f(x) = \begin{cases} 1 + \frac{x-1}{\ln|x|}, & x < 0 \\ h(x) + e^{-x}, & x \geq 0 \end{cases}$ et (C_f) sa

courbe représentative dans un repère orthonormé $(O ; \vec{u} ; \vec{v})$.

1. Détermine le domaine de définition de f .
2. Étudie la continuité et la dérivabilité de f en 0.
3. Étudie les variations de f puis dresse son tableau de variation (On pourra utiliser les parties B et C).
4. Étudie les branches infinies de la courbe (C_f)
5. Vérifie que : $f(\alpha) = 1 + \alpha$
6. Trace la courbe (C_f) (On prendra $\alpha = -3,6$).



Ministère de l'Education Nationale		Académie d'Enseignement de Kati	
GROUPE SCOLAIRE AMADOU SIDIBE(GSAS)		LYCEE PRIVE DJINESSIRA COULIBALY (L.P.DJI.COUL)	
Tél : 20 71 99 37 / 76 49 67 10 / 50 02 92 93		Email : Ipdjicoul-info@yahoo.fr	Kalaban coro Sangha
COMPOSITION DE LA DEUXIEME PERIODE			Année Scolaire : 2021-2022
Classe : TSE	Matière : MATHEMATIQUES	Durée : 4 Heures	Coef : 04

Exercice 1

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$. On prendra 1 cm pour l'unité graphique. On considère l'application f du plan dans lui-même qui, à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' telle que : $z' = -(\sqrt{3} + i)z - 1 + i(1 + \sqrt{3})$.

4. Montre que f est une similitude directe dont le centre Ω a pour affixe i puis détermine le rapport et l'angle.
5. Soit M_0 le point d'affixe $z_0 = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{3}{4}i$.
- c) Calcule ΩM_0 .
- d) Donne une mesure en radians de l'angle $(\vec{u}; \overrightarrow{\Omega M_0})$.
6. On considère la suite de points $(M_n)_{n \geq 0}$, définie pour tout entier naturel n par $M_{n+1} = f(M_n)$. On note z_n l'affixe du point M_n .
- d) Détermine les affixes des points M_1, M_2, M_3 et M_4 .
- e) Montre par récurrence, pour tout entier naturel n , l'égalité : $z_n - i = 2^n e^{i\frac{7n\pi}{6}} (z_0 - i)$.
- f) Pour tout entier naturel n , Calcule ΩM_n puis détermine le plus petit entier n tel que $\Omega M_n \geq 10^2$.

Exercice 2

On se propose de déterminer l'ensemble S des entiers relatifs n vérifiant le système : $\begin{cases} n \equiv 4[12] \\ n \equiv 3[11] \end{cases}$

5. a) On considère l'équation suivante : $(E): 12u + 11v = 1$
- b) Sans exhiber une solution, justifier l'existence d'un couple d'entiers relatifs $(u; v)$ solution de (E) .
- c) Déterminer un couple $(u_0; v_0)$ solution de (E) .
6. Montrer que pour tout couple $(u; v)$ vérifiant (E) , l'entier $3 \times 12u + 4 \times 11v$ appartient à S .
7. Soit n un entier relatif appartenant à S . On pose $n_0 = 3 \times 12u_0 + 4 \times 11v_0$
- c) Démontrer que $n - n_0 \equiv 0[132]$
- d) En déduire qu'un entier relatif n appartient à S si et si seulement s'il peut s'écrire sous la forme $n = 132k - 8$ où k est un entier relatif.
8. A l'occasion d'un colloque international de mathématique, Mamour a remis à Farba de l'argent avec lequel Farba achète des cartes de crédit téléphonique qu'il distribue aux participants. Très fin mathématicien, Farba dit à ses étudiant : « Avec l'argent que Mamour m'a remis, j'ai entre 800 et 1000 cartes de crédit de 1000 F. si je fais des lots de 12 cartes, il m'en resterait 4 et si je fais des lots de 11 cartes, il m'en resterait 3. Quelle somme d'argent ai-je dépensé ? »

Mettez-vous à la place des étudiants de Farba et répondez à la question.

Problème

Partie A : On se propose de résoudre l'équation différentielle $(E_1) : y'' + 2y' + y = 2e^{-x}$.

4. Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation différentielle $(E_2) : y'' + 2y' + y = 0$ où y désigne une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.
5. a) Déterminer le réel a pour que la fonction u définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = ax^2e^{-x}$ soit solution de l'équation (E_1) .
b) Démontre que la fonction h est solution de (E_1) si et seulement si $(h - u)$ est solution de (E_2)
c) En déduire l'ensemble de solution de l'équation (E_1) .
6. Déterminer la fonction h solution de (E_1) telle que $h(0) = 0$ et $h'(0) = 2$.

Partie B : Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = (x^2 + 2x)e^{-x}$ et (C_h) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$ d'unité graphique 1 cm.

4. Étudie les variations de h .
5. Étudie les branches infinies puis construis la courbe (C_h)
6. Calcule $I = \int_0^1 h(x)dx$ puis donne l'aire de la position délimitée par la courbe (C_h) ; l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$

Partie C : On considère la fonction g définie sur $]-\infty; 0[$ par $g(x) = 1 - x + x \ln|x|$

4. Étudie les variations de g .
5. Montre que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in]-4; -3[$
6. Déduis-en le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x .

Partie D : Soit f la fonction numérique définie par $f(x) = \begin{cases} 1 + \frac{x-1}{\ln|x|}, & x < 0 \\ h(x) + e^{-x}, & x \geq 0 \end{cases}$ et (C_f) sa

courbe représentative dans un repère orthonormé $(O ; \vec{u} ; \vec{v})$.

7. Détermine le domaine de définition de f .
8. Étudie la continuité et la dérivabilité de f en 0.
9. Étudie les variations de f puis dresse son tableau de variation (On pourra utiliser les parties B et C).
10. Étudie les branches infinies de la courbe (C_f)
11. Vérifie que : $f(\alpha) = 1 + \alpha$
12. Trace la courbe (C_f) (On prendra $\alpha = -3,6$).

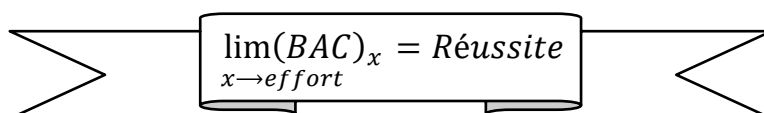
Partie E :

Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n non nul par : $u_n = \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^n (k+n)^2 e^{-\frac{k}{n}}$.

1. Montre que pour tout entier naturel n non nul et pour tout entier k tel que :

$$0 \leq k \leq n-1, \text{ on a : } \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t)dt \leq \frac{1}{n} f\left(\frac{k+1}{n}\right)$$

2. Déduis-en que pour tout entier naturel n non nul, on a : $u_n + \frac{e-4}{ne} \leq \int_0^1 f(t)dt \leq u_n$ et que $\left(I + \frac{e-1}{e}\right) \leq u_n \leq \left(I + \frac{e-1}{e} + \frac{4-e}{ne}\right)$.
3. Montre que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente et donner sa limite.



Exercice 1.....(06 points)

A) Intègre les équations différentielles suivantes :

(E): $x^7 y' + x^6 + 9 = 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$

(F): $y' = \cotan^2 x$ sur $\mathbb{R}$

(G): $\frac{25}{9} y' + 4y = 0$

(H): $y'' - 12y' + 35y = 0$

(L): $y'' - y' + 3y = 0$

B) On considère l'équation différentielle (E): $y'' - 13y' + 40y = -27 \cos(7x) + 273 \sin(7x)$

1. Trouve la fonction h définie par $h(x) = a \cos(7x) + b \sin(7x)$ solution particulière de (E)

2. Résous (F): $y'' - 13y' + 40y = 0$

3. Déduis-en une résolution de (E)

Exercice 2.....(04points)

Soit n un entier naturel non nul, et on considère l'équation différentielle $(E_n) : y' + y = \frac{x^n}{n!} e^{-x}$

1. Soit g et h deux fonctions définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que $g(x) = h(x)e^{-x}$

a) Montre que g est une solution de (E_n) si, et seulement, si pour tout nombre réel x ,

$$h'(x) = \frac{x^n}{n!}$$

b) Déduis-en la fonction h associée à une fonction g de (E_n) sachant que $h(0) = 0$. Quelle est alors la fonction g ?

2. Soit φ une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.

a) Montre que la fonction φ est solution de (E_n) si, et seulement, si $(\varphi - g)$ est solution de l'équation différentielle (F): $y' + y = 0$

b) Résous (F) puis (E_n) .

Problème(10 points)

Partie A : Etude d'une fonction auxiliaire

On considère la fonction numérique de g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 2e^x + 2x - 7$

1. Etudie les limites de g en $+\infty$ et en $-\infty$

2. Etudie le sens de variation de g sur $\mathbb{R}$ et dresse son tableau de variation

3. Justifie que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α dans $\mathbb{R}$ puis donne un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}

4. Etudie le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$

Partie B : Etude de la fonction f

La fonction f est définie sur $\mathbb{R} : f(x) = (2x - 5)(1 - e^{-x})$ et on note (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormal (Unité : 2 cm).

1. Etudie le signe de $f(x)$ sur $\mathbb{R}$
2. Etudie les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$
3. a) Calcule $f'(x)$ et vérifie que $f'(x)$ et $g(x)$ ont même signe puis dresse le tableau de variation.
4. a) Démontre l'égalité : $f(\alpha) = \frac{(2\alpha-5)^2}{2\alpha-7}$
 b) Etudie le sens de variation de la fonction h définie par $h(x) = \frac{(2x-5)^2}{2x-7}$ sur $]-\infty; \frac{5}{2}[$
 c) Déduis-en, à partir de l'encadrement de α obtenu dans la partie A, un encadrement d'amplitude de 10^{-2} de $f(\alpha)$.
 d) Détermine une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 0.
5. Démontre que la courbe (C) admet une asymptote oblique (D) lorsque x tend vers $+\infty$ puis précise la position de (C) par rapport à (D)
6. Trace la droite (D) et la courbe (C) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$

Partie C : Calcul d'aire

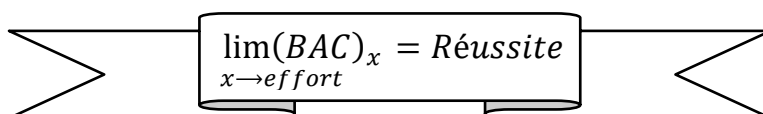
A l'aide d'une intégration par partie, calcul l'aire A en cm^2 , de la fonction du plan délimitée par la courbe (C) ; l'axe des abscisses ; l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = \frac{5}{2}$.

Partie D : Etude d'une suite de rapport et de distances

Pour tout entier naturel supérieur ou égal à 3, on considère les points A_n , B_n et C_n d'abscisse n , appartenant respectivement l'axe des abscisses, la droite (D) et la courbe (C) ; soit (U_n) le nombre réel défini par : $U_n = \frac{C_n B_n}{A_n B_n}$.

1. Démontre que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 3 ; on a $U_n = \frac{2n-5-f(5)}{2n-5}$
2. a) Quelle est la nature de la suite (U_n) ?
 b) Quelle est la limite de la suite (U_n) ? Pouvait-on prévoir ce résultat.

Vive les mathématiques !



DEVOIR SURVEILLE DE LA PREMIERE PERIODE

**Année Scolaire :
2022-2023**

**Classe : TSE Matière :
MATHEMATIQUES**

Durée : 3 Heures

Coef : 04

Exercice 1.....(06 points)

Le plan complexe est muni du repère orthonormal direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$; unité graphique 2 cm. On appelle A et B les points du plan d'affixes respectives $a = 1$ et $b = 1$. On considère l'application f qui, à tout point M différent du point B, d'affixe z , fait correspondre le point M' d'affixe z' définie par $z' = \frac{z-1}{z+1}$.

On fera une figure qui sera complétée tout au long de cet exercice.

1. Déterminer les points invariants de f c'est-à-dire les points M tels que $M = f(M)$.
2. a) Montrer que, pour tout nombre complexe z différent de -1 , $(z' - 1)(z + 1) = -2$
b) En déduire une relation entre $|z' - 1|$ et $|z + 1|$, puis $\arg(z' - 1)$ et $\arg(z + 1)$, pour tout nombre complexe z différent de -1 . Traduire ces deux relations en termes de distances et d'angles.
3. Montrer que si M appartient au cercle (C) de centre B et de rayon 2, alors M' appartient au cercle (C') de centre A et de rayon 1.
4. Soit le point P d'affixe $p = -2 + i\sqrt{3}$
 - a) Déterminer la forme exponentielle de $(p + 1)$
 - b) Montrer que le point P appartient au cercle (C)
 - c) Soit Q le point d'affixe $q = -\bar{p}$ où $\bar{p}$ est le conjugué de p . Montrer que les points A, P' et Q sont alignés.
 - d) En utilisant les questions précédentes, proposer une construction de l'image P' du point P par l'application f .

Exercice 2.....(04points)

1. Ecrire sous forme algébrique le nombre complexe $z = 7 - i + \frac{5}{(1-7i)(i-1)}$
2. Ecrire sous forme trigonométrique le nombre complexe t dans les cas suivants :
 - a) $t = \frac{(1+i)^5}{(1+i\sqrt{3})\sqrt{3}-i}$
 - b) $t = -2e^{i\frac{2\pi}{3}}$
 - c) $t = \frac{1+e^{i\frac{2\pi}{3}}}{1-e^{i\frac{2\pi}{3}}}$
3. a) Déterminer les racines sixièmes de l'unité ; puis les écrire sous formes trigonométrique et algébrique
b) Calculer $(1 - i)^6$
c) En déduire les racines sixièmes du complexe $T = 8i$ sous formes trigonométriques et algébrique

Problème(10 points)

Partie A

Pour chaque réel $\alpha \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$, on définit l'application

$$f_\alpha : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$$

$$z \rightarrow f_\alpha(z) = z^2 \cos^2 \alpha - 2z \cos \alpha + 1 + \sin^2 \alpha$$

Dans le plan affine euclidien muni d'un repère orthonormé direct $(o; \vec{i}; \vec{j})$, on désigne par (E) l'ensemble des points M d'affixes z telle qu'il existe $\alpha \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$, vérifiant $f_\alpha(z) = 0$

1. a) Résolvez dans l'équation $f_\alpha(z) = 0$
b) Si le point M(z) appartient à (E), que peut-on dire du point M' d'affixe $\bar{z}$
2. Pour $\alpha \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ fixé on pose : $z = \frac{1}{2}i(z' + z'')$ où z' et z'' sont les solutions de l'équation $f_\alpha(z) = 0$. Déterminer les racines quatrièmes de z et représenter les points images sur le cercle.

Partie B

Soit le complexe $z = (\sqrt{3} + 1) + i(\sqrt{3} - 1)$

1. Déterminer le module et un argument de z^2 . En déduire le module et un argument de z.
2. Déterminer de ce qui précède les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$

Partie C

A tout complexe z différent de 3-i, on associe le complexe $f(z) = \frac{2iz-4+2i}{z-3+i}$

1. Calculer $f(1+i)$
2. Déterminer le complexe z tel que $f(z) = 1+i$
3. On appelle x et y la partie réelle et la partie imaginaire de z. Déterminer en fonction de x et y la partie réelle X et la partie imaginaire Y de $f(z)$
4. a) Dans le plan complexe, on appelle A le point d'affixe -1-2i, le point d'affixe 3-i et M le point d'affixe z. Montrer que $|f(z)| = \frac{2MA}{MB}$.
b) Donner une interprétation de $\arg[f(z)]$ à l'aide de l'angle $(\overrightarrow{MB}; \overrightarrow{MA})$

Vive les mathématiques !

COMPOSITION DE LA PREMIERE PERIODE

**Année Scolaire :
2022-2023**

**Classe :
TSE**

**Devoir surveillé :
MATHEMATIQUES**

Durée : 3 Heures

Coef : 04

Exercice 1(06 pts)

- On considère l'équation (E) d'inconnue z : $z^4 - 5iz^3 - 10z^2 + 10iz + 4 = 0$.
 - Vérifier que $-1 + i$ et $2i$ sont solutions de (E).
 - Résoudre (E).
- Dans le plan complexe P rapporté au repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, d'unité graphique 4 cm , on considère les points A, B, C et D d'affixes respectives :
 $z_A = 2i$; $z_B = i$; $z_C = -1 + i$; $z_D = 1 + i$. On fera une figure qui sera complétée au fur et à mesure de l'exercice. Soit l'application f définie de P dans P qui à tout point M d'affixe $z \neq i$ associe le point M' d'affixe z' tel que $z' = i \left(\frac{z-2i}{z-i} \right)$.
 - Déterminer l'ensemble des points invariants par f . On exprimera leurs affixes sous forme algébrique puis sous forme trigonométrique.
 - Montrer que pour tout complexe z différent de i , $|z'| = \frac{AM}{BM}$ et que pour tout complexe z différent de i et $2i$, $\arg(z') = (\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{AM}) + \frac{\pi}{2} + 2k\pi$.
 - Déterminer et construire l'ensemble (E) des points M d'affixe z tels que $|z'| = 1$.
 - Déterminer et construire l'ensemble (F) des points M d'affixe z tels que :
 $\arg(z') = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$.
- Démontrer que $z' - i = \frac{1}{z-i}$.
 - Soit M un point du cercle (C) de centre B et de rayon $\frac{1}{2}$. Prouver que le point M' d'affixe z' appartient à un cercle (C') dont on précisera le centre et le rayon.

Exercice 2 (04 pts)

- Montrer que pour tout entier relatif n , les nombres $14n + 3$ et $5n + 1$ sont premiers entre eux.
- On considère l'équation (E) : $87x + 31y = 2$.
 - Déterminer deux entiers relatifs u et v tels que : $87u + 31v = 1$.
 - En déduire une solution particulière de l'équation (E), puis la résoudre.
- L'équation $168x + 20y = 6$ dont les inconnues x et y sont des entiers relatifs admet au moins un couple de solution. Vrai ou faux (On justifiera la réponse choisie).
- Déterminer le reste de la division euclidienne de 5^{136} par 7.
 - Un nombre s'écrit $\overline{3x53}$ en base 10. Déterminer x pour que : $5^{136} + \overline{3x53}$ soit divisible par 7.
- Démontrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, 3^{n+3} - 4^{n+2}$ est divisible par 11.

Exercice 3.....(06 pts)

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On prendra 1 cm pour unité graphique. On considère les points A, B, C et D d'affixes respectives :

$$z_A = 2 + i; z_B = 1 + 2i; z_C = 6 + 3i; z_D = -1 + 6i.$$

1. Représenter les points A, B, C et D.
2. Montrer qu'il existe une similitude directe f telle que $f(A) = B$ et $f(C) = D$.
Montrer que cette similitude est une rotation et préciser ses éléments caractéristiques.
3. Soit J le point d'affixe $3 + 5i$. Montrer que la rotation de centre J et d'angle $-\frac{\pi}{2}$ transforme A en D et C en B.
4. On appelle I le point d'affixe $1 + i$, M et N les milieux respectifs des segments $[AC]$ et $[BD]$. Déterminer en utilisant les résultats des questions précédentes, la nature du quadrilatère $IMJN$.
5. On considère les points P et Q tels que les quadrilatères $IAPB$ et $ICQD$ sont des carrés directs.
 - a) Calculer les affixes z_P et z_Q des points P et Q.
 - b) Déterminer $\frac{IP}{IA}$ et $\frac{IQ}{IC}$ ainsi qu'une mesure des angles $(\vec{IA}, \vec{IP})$ et $(\vec{IC}, \vec{IQ})$. En déduire les éléments caractéristiques de la similitude directe g telle que $g(A) = P$ et $g(C) = Q$.
 - c) En déduire que J est l'image de M par g . Que peut-on en déduire pour J ?

Exercice 4.....(04 pts)

1. On considère l'équation $(E) : 8x + 5y = 1$, où $(x ; y)$ est un couple de nombres entiers relatifs.
 - a) Donner une solution particulière de l'équation (E) .
 - b) Résoudre l'équation (E) .
2. Soit N un nombre naturel tel qu'il existe un couple $(a ; b)$ de nombres entiers vérifiant :
$$\begin{cases} N = 8a + 1 \\ N = 5b + 2 \end{cases}$$
 - a) Montrer que le couple $(a ; b)$ est solution de (E) .
 - b) Quel est le reste de la division euclidienne de N par 40 ?
3. a) Résoudre l'équation : $8x + 5y = 100$ où $(x ; y)$ est un couple d'entiers relatifs.
b) Au 6^e siècle, un groupe d'hommes et de femmes a dépensé 100 pièces de monnaie dans une auberge. Les hommes ont dépensé 8 pièces chacun et les femmes 5 pièces chacune. Combien pouvait-il y avoir d'hommes et de femmes dans le groupe

COMPOSITION DE LA DEUXIEME PERIODE

**Année Scolaire :
2022-2023**

**Classe : Devoir surveillé :
TSE MATHEMATIQUES**

Durée : 3 Heures

Coef : 04

Exercice 1(05 pts)

Soit $P(z) = z^4 + (2i - 9)z^3 + (28 - 18i)z^2 + (56i - 20)z - 40i$.

- a) Montrer que l'équation $P(z) = 0$ admet une solution imaginaire pure z_0 et une solution réelle z_1 .
b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$
- Dans le plan complexe P rapporté au repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, d'unité graphique 1 cm, on considère les points A, B, C et D d'affixes respectives :
 $z_A = -2i$; $z_B = 4 - 2i$; $z_C = 4 + 2i$; $z_D = 1$. Place les points A, B, C et D dans le plan.
- Soit l'application f définie de P dans P qui à tout point M d'affixe $z \neq i$ associe le point M' d'affixe z' tel que $z' = \frac{z-4-2i}{z+2i}$.
 - Déterminer les images B' et C' des points B et C par f
 - Interpréter géométriquement $|z'|$ et $\arg(z')$
 - Montrer que les points A, B' et C' sont alignés
 - Quelle est la nature du triangle B'DC' ?

Exercice 2 (05 pts)

- Résoudre :
 - $x \in \mathbb{Z}/8\mathbb{Z} : x^2 - 3x + 2 = 0$
 - $(x; y) \in (\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^2 : \begin{cases} 3x + 4y = 1 \\ 2x - 3y = 4 \end{cases}$
- Soit l'équation (E): $(x; y) \in \mathbb{Z}^2 : 5x - 7y = 4$
 - Parmi les couples suivants indiquer celui qui est solution de l'équation (E) :
(0; 1) ; (5; 3) et (1; 8)
 - En déduire la résolution de l'équation (E)
- On pose $a = 7k + 5$ et $b = 5k + 3$; $k \in \mathbb{Z}$
 - Déterminer les valeurs possibles du $PGCD(a; b)$
 - Déterminer les valeurs de k pour lesquelles $PGCD(a; b) = 1$

Problème (10 pts)

Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} ; x \mapsto f(x)$ tels que :
$$\begin{cases} f(x) = \sqrt{x^2 - x - 2}; si x \in]-\infty; -1] \cup [2; +\infty[\\ f(x) = \frac{-x-1}{x}; si x \in [-1; 0[\\ f(x) = -x^2 + 2x; si x \in [0; 2] \end{cases}$$

Partie I

1. Soit $f_1: [0; 2] \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto f_1(x) = -x^2 + 2x$
Dresser le tableau de variation de f_1
2. Soit $f_2: [-1; 0[\rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto f_2(x) = \frac{-x-1}{x}$
 - a) Dresser le tableau de variation de f_2
 - b) Préciser l'asymptote à la courbe (C_{f_2})
 - c) Donner l'équation de la tangente à (C_{f_2}) au point d'abscisse $x_0 = -1$
3. Soit $f_3:]-\infty; -1] \cup [2; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto f_3(x) = \sqrt{x^2 - x - 2}$
 - a) Calculer : $\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{f_3(x)}{x+1}$ et $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f_3(x)}{x-2}$ puis donner une interprétation graphique de chaque résultat obtenu
 - b) Etudier les variations f_3
 - c) Déterminer les asymptotes à la courbe (C_{f_3})

Partie II

1. a) Etudier la dérivabilité de f aux points d'abscisses -1 et 2.
b) Dresser le tableau de variations de f
2. a) Résoudre dans l'équation $f(x) = 0$
b) Préciser les asymptotes à la courbe (C_f)
c) Tracer la courbe (C_f)
3. a) Discuter suivant les valeurs du paramètre réel m l'existence du nombre et du signe des solutions de l'équation $f(x) = m$
b) Montrer que la restriction de f à l'intervalle $[2; +\infty[$ réalise une bijection de $[2; +\infty[$ sur un intervalle J que l'on précisera. Donner l'équation de la tangente à (C_g^{-1}) au point d'abscisse 2.
c) Tracer la courbe (C_g^{-1})

Partie III

Soit la fonction h définie par $h(x) = \frac{1}{f(x)}$

- a) Déterminer l'ensemble du domaine de définition de h
- b) Etudier le sens de variation de h puis dresser son tableau de variations

Exercice 1(04 pts)

Soit la fonction numérique φ définie par $\varphi(x) = (x+1)\sqrt{x+1}$

1. Etudier les variations de la fonction φ sur $[0; 1]$
2. Soit $a \in [0; 1]$, montrer que $\forall x \in [0; a]$, on a : $\varphi'(0) \leq \varphi'(x) \leq \varphi'(a)$
3. En déduire que $\forall x \in [0; a]$, on a : $\frac{3}{2}a \leq (1+a)\sqrt{1+a} - 1 \leq \frac{3}{2}a\sqrt{1+a}$

Exercice 2 (06 pts)

Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{1+\cos 3x}{\cos^3 x}$ et (C) sa courbe.

1. Déterminer le domaine de définition Df de f
2. Etudier la périodicité, la parité de f puis en déduire que Df peut se réduire à $[0; \pi]$
3. Montrer que $\forall x \in Df$, on a : $f'(x) = \frac{3(1-2\cos x)\sin x}{\cos^4 x}$
4. Dresser le tableau de variation de f sur $[0; \pi]$

Problème.....(10 pts)

On donne la fonction numérique f définie par $f(x) = \frac{2x^2+ax+8}{bx^2+x+c}$ où a, b et c sont des réels.

Soit (Cf) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

1. Déterminer les réels a, b et c sachant que (Cf) admet les droites d'équations $x = 3$ et $y = 2x$ comme asymptotes.
2. Dans la suite du problème on prendra : $a = -6$; $b = 0$ et $c = -3$
Etudier les variations de la fonction f
3. Calculer $f(7)$ et montrer que $I(3; 6)$ est centre de symétrie de (Cf)
4. Montrer que la restriction g de f à $[5; +\infty[$ est une bijection de $[5; +\infty[$ sur un intervalle J à préciser. Calculer $(g^{-1})(16)$ sans expliciter g^{-1}
5. Montrer que l'équation $f(x) = 3$ admet une solution unique $\alpha \in [1; 2]$
6. Tracer (Cf) et (C') la courbe de g^{-1} dans le même repère
7. Montrer que $\forall x \in Df, f'(x) = 2 - \frac{5}{(x-3)^2}$ puis en déduire que
 $\forall x \in [5; 7]$ on a : $0 \leq f'(x) \leq \frac{3}{2}$
8. Démontrer que $\forall x \in [5; 7]$, on a : $\frac{3}{2}x + \frac{1}{2} \leq f(x) \leq 16$

COMPOSITION DE LA DEUXIEME PERIODE

**Année Scolaire :
2022-2023**

**Classe : Devoir surveillé N° 1 :
TSE MATHEMATIQUES**

Durée : 3 Heures

Coef : 04

Exercice 1(05 pts)

Soit f la fonction numérique de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{12x^2+12x+1}{(2x+1)^3}$

4. Déterminer l'ensemble de définition de f

5. détermine les réels a et b tels que : $\forall x \in Df; f(x) = \frac{a}{2x+1} + \frac{b}{(2x+1)^3}$

6. a) en déduis une primitive F de f sur $]-\infty; -\frac{1}{2}[$

b) calcule $A = \int_{-2}^{-1} f(x)dx$

Exercice 2(05 pts)

Soit la fonction g définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par $g(x) = \frac{1}{x(x^2-1)}$

1. Déterminer le domaine de définition de g

2. Déterminer trois réels a, b et c tels que $\forall x \in]1; +\infty[$ on ait :

$$g(x) = \frac{a}{x} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{x+1}$$

3. Déterminer une primitive de la fonction g sur $]1; +\infty[$

4. A l'aide d'une intégration par partie, calculer : $I = \int_2^3 \left[\frac{x \ln x}{(x^2-1)^2} \right] dx$

Problème (10 pts)

A) Soit la fonction f définie par $f(x) = 2 \sin x + 6 \sin^3 x$ et on pose $F(x) = \cos x + b \cos^3 x$ avec $x \in \mathbb{R}$

5. Trouver les réels a et b tels que F soit une primitive de f

6. Calcule $H = \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)dx$

B) On donne $T = \int_0^{\pi} (3x+7) \cos^2(5x)dx$ et $L = \int_0^{\pi} (3x+7) \sin^2(5x)dx$

5. Calcule $T + L$ et $T - L$

6. Déduis-en les valeurs exactes de T et L

C) Trouve les primitives des fonctions définies ci-dessous

5. $f(x) = \sin x \cos^2 x$

6. $g(x) = x^4 (\sqrt[3]{17x^5 + 2})$

COMPOSITION DE LA DEUXIEME PERIODE

**Année Scolaire :
2022-2023**

**Classe : Devoir surveillé N° 2 :
TSE MATHEMATIQUES**

Durée : 3 Heures

Coef : 04

Exercice 1(05 pts)

Soit $I = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2+2}} dx$; $J = \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^2+2}} dx$ et $K = \int_0^1 \sqrt{x^2+2} dx$

1. Soit f la fonction définie sur $[0; 1]$ par : $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+2})$
Calculer la dérivée de f puis en déduire la valeur de I .
2. a) sans calculer explicitement J et K vérifier que : $J + 2I = K$
b) A l'aide d'une intégration par parties portant sur l'intégrale K , démontrer que : $K = \sqrt{3} - J$
c) En déduire les valeurs de J et de K .

Exercice 2 (05 pts)

Pour tout entier n on pose $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^{2n+1}x} dx$

- 1) déterminer les réels a et b tels que : $\frac{1}{\cos x} = \frac{a \cos x}{1-\sin x} + \frac{b \cos x}{1+\sin x}$. En déduire le calcul de $I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos x} dx$
- 2) Démontrer que à l'aide d'une intégration par partie que : $2nI_n = (2n-1)I_{n-1} + \frac{2^n}{\sqrt{2}}$
(on pourra poser $\frac{1}{\cos^{2n+1}(x)} = \frac{1}{\cos^{2n-1}(x)} \times \frac{1}{\cos^2(x)}$)

Problème (10 pts)

Partie A

Soient les intégrales T et S définies par : $T = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 x} dx$ et $S = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^4 x} dx$

- 1) Calculer T
- 2) Soit la fonction définie sur $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$ par : $f(x) = \frac{\sin x}{\cos^3 x}$
 - a) Montrer que $\forall x \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right]$, on a : $f'(x) = \frac{3}{\cos^4 x} - \frac{2}{\cos^2 x}$
 - b) En déduire une relation entre T et S
 - c) Calculer S .

Partie B

On considère les intégrales définies par : $I = \int_0^{\pi} \cos^4 x dx$ et $J = \int_0^{\pi} \sin^4 x dx$

- 1) a) montrer que l'intégrale I peut s'écrire : $I = \int_0^{\pi} \cos x (\cos x - \cos x \sin^2 x) dx$
- b) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que $I = \int_0^{\pi} \sin^2 x dx - \frac{1}{3}J$
- c) Montrer aussi que l'intégrale J peut s'écrire : $J = \int_0^{\pi} \cos^2 x dx - \frac{1}{3}I$
- 2) a) Montrer que $I + J = \frac{3\pi}{4}$
- b) Montrer que $J - I = 0$
- c) En déduire les valeurs des intégrales I et J .

Ministère de l'Éducation Nationale		Académie d'Enseignement de Kati	
GROUPE SCOLAIRE AMADOU SIDIBE(GSAS)		LYCEE PRIVE DJINESSIRA COULIBALY (L.P.DJI.COUL)	
Tél : 20 71 99 37 / 76 49 67 10 / 50 02 92 93		Email : Ipdjicoul-info@yahoo.fr	Kalaban coro Sangha
COMPOSITION DE LA PREMIERE PERIODE			Année Scolaire : 2023-2024
Classe : TSE	Devoir surveillé : MATHEMATIQUES	Durée : 3 Heures	Coef : 04

Exercice 1(04 pts)
 Linéariser : $\cos^4(7x) \times \sin^3(5x)$

1. Ecrire sous forme trigonométrique le nombre complexe $t = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)^{2018}$
2. Résous dans $\mathbb{C}$, l'équation $z^4 = 8(1 - i\sqrt{3})$
3. Mettre sous forme trigonométrique $z_0 = 1 - e^{i\theta}$; $z_1 = 1 + e^{i\theta}$; $z_2 = 1 + e^{i3\theta}$; $z = \frac{z_0}{z_1}$ et $z' = z_0 \times z_1$ avec $\theta \in]0; \pi[$ (On discutera suivant les valeurs de θ)

Exercice 2 (04 pts)
 Soit α un nombre réel appartenant à $]0; \frac{\pi}{2}[$. On considère l'équation d'inconnue z complexe
 (E) : $z^3 - (1 + 2\cos\alpha)z^2 + (1 + 2\cos\alpha)z - 1 = 0$
 4. Résous dans $\mathbb{C}$, l'équation (E) sachant que 1 est une solution évidente
 5. On désigne par z_1 et z_2 les autres solutions de l'équation (E) telles que $\text{Im}(z_2) < 0$ et $Z = \frac{1}{2}(z_1 - z_2) \times \left(\frac{1}{\sin\alpha}\right)$.

Détermine les racines quatrièmes de Z sous forme trigonométrique puis sous forme algébrique et représenter leur point image sur le cercle trigonométrique.

6. Préciser le module et un argument de z_1 et z_2 .

Problème(12 pts)
 Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé (O, I, J), on considère le polynôme complexe

$$f(z) = z^4 - 4z^3 + 30z^2 - 52z + 425 = 0$$

9. Montrer que si z_0 est solution de l'équation $f(z) = 0$ alors $\bar{z}_0$ est aussi solution
 10. Calculer $f(-1 + 4i)$. Que peut-on déduire ?
 11. En déduire la résolution de l'équation $f(z) = 0$ (On notera z_A la solution qui a ses parties réelle et imaginaire positives ; z_B celle qui a sa partie réelle négative et sa partie imaginaire positive ; z_C celle dont les parties réelles et imaginaire sont négatives et z_D la quatrième solution.
 12. Soit A, B, C et D les points images des solutions z_A, z_B, z_C et z_D de l'équation $f(z) = 0$. Placer ces points dans le plan complexe puis en déduire la nature du triangle ABC puis celle du polygone ABCD.
 13. Déterminer le périmètre puis l'aire de chacune des figures ABC et ABCD
 14. a) Montrer que les points A, B, C et D sont sur un même cercle (Γ) dont-on précisera son centre et son rayon.
- c) En déduire une équation cartésienne de (Γ).

15. Détermine l'affixe du point G centre de gravité du triangle ABC.
16. On pose $Z = \frac{z - z_B}{z - z_A}$ avec z l'affixe du point M.
- c) Mettre Z sous forme algébrique puis préciser $\text{Re}(Z)$ et $\text{Im}(Z)$.
 - d) Déterminer et construire les ensembles des points $M(Z)$ du plan tels que :
 - iv) $|Z| = 1$
 - v) $|Z| = \frac{2}{3}$
 - vi) $\arg(Z) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi ; k \in \mathbb{Z}$

COMPOSITION DE LA PREMIERE PERIODE

**Année Scolaire :
2023-2024**

**Classe : Devoir surveillé :
TSE MATHEMATIQUES**

Durée : 3 Heures

Coef : 04

Exercice 1(06 pts)

- Montre que, pour tout élément n de $\mathbb{N}$, l'entier $(2n^2 + 2n)$ est premier avec $2n + 1$
- Résous :
 - $x \in \mathbb{Z}; \begin{cases} x \equiv 1[5] \\ x \equiv 2[3] \end{cases}$
 - $x \in \mathbb{Z}; x^2 \equiv -1[5]$
 - $x \in \mathbb{Z}; x^2 + 3x - 4 \equiv 0[7]$
- On divise 4373 et 826 par un même entier naturel les restes respectifs sont 8 et 7. Quel est le diviseur ?
- Détermine l'entier α pour que le nombre qui s'écrit $\overline{\alpha 2 \alpha 3 1}$ dans le système décimal soit divisible par 11
 - Etudie les restes de la division euclidienne par 7 de 10^n
- c) détermine les chiffres x et y pour que l'entier N qui s'écrit $\overline{x 3 y 1 x}$ dans le système décimal soit divisible par 35
- Soit N un entier naturel tel que $N = \overline{a 0 b^5}$ et $N = \overline{b a c^7}$. Détermine les entiers a, b et c
- Résous :
 - $(a, b) \in \mathbb{N}^2: \begin{cases} a \wedge b = 42 \\ a \vee b = 1680 \end{cases}$
 - $(x, y) \in \mathbb{N}^2: \begin{cases} x + y = 651 \\ \frac{x \vee y}{a \wedge b} = 108 \end{cases}$

Exercice 2 (04 p)

On veut planter des arbres sur le périmètre d'un terrain triangulaire de côtés 132 m, 156 m et 204 m, de telle sorte qu'il y ait un arbre à chaque sommet du triangle et que les arbres soient également espacés.

Quel est le nombre minimum d'arbres que l'on pourra planter si l'on veut que la distance entre deux arbres soit exprimée en un nombre entier de mètres ?

Problème(10 pts)

Partie 1

- Montre que $2^{17} + 3^{17} - 5$ est pair
- $\forall n \in \mathbb{N}$, montre que $3^{n+3} - 4^{n+2}$ est multiple de 11
- Résous dans $\mathbb{Z}/17\mathbb{Z}$ l'équation $x^2 + 2x + 9 = 0$

4. On pose l'équation $(E) : 51x + 54y = 2004$
 - a) Détermine le $PGCD(51 ; 54)$
 - b) Montre que (E) admet une solution
 - c) Montre que (E) peut s'écrire sous la forme $17x + 18y = 668$
 - d) Soit $(E') : 17x + 18y = 1$
 - Trouve une solution particulière de (E')
 - Résous (E') dans $\mathbb{Z}$
 - En déduis l'ensemble solutions de (E) dans $\mathbb{Z}$

Partie 2

Lors d'une représentation, un magicien demande aux spectateurs d'effectuer le programme de calcul (A) suivant :

« Prenez le numéro de votre jour de naissance et multipliez par 12 ; prenez le numéro de votre mois de naissance multipliez par 37 ; ajoutez les deux nombres obtenus, je pourrai alors vous donner la date de votre anniversaire »

Un spectateur annonce 308 et en quelques secondes le magicien déclare le 1^{er} Août

1. Vérifie que une personne née le 1^{er} Août le programme de calcul (A) donne effectivement 308
2. a) Pour un spectateur donné, on note z le résultat obtenu en application le programme de calcul (A), exprimer z en fonction de j et m et démontre que $z \equiv m[12]$
 b) Retrouve alors la date de naissance d'un spectateur ayant obtenu le nombre 455 en appliquant le programme de calcul (A)
3. Le magicien décide de changer son programme de calcul.
 Pour un spectateur dont le numéro du mois de naissance est m et le jour j , la magicien demande de calculer le nombre z défini par $z = 12j + 31m$
 Quelle est alors la date d'anniversaire correspondante à $z = 503$

Partie 3

En rangeant les n pièces de son puzzle, Oumar constate que :

- S'il les range par groupe de 5, il reste 3 pièces
 - S'il les range par groupe de 7, il reste 2 pièces
 - S'il les range par groupe de 9, il reste 1 pièce
 - S'il les range par groupe de 11, il ne lui reste plus rien
- Sa mère affirme que $2n-11$ est divisible par 5 ; 7 ; 9 et 11

1. A-t-elle raison ? Justifie
2. Combien de pièces contient ce puzzle sachant que ce nombre est inférieur à 2000

NB : PUZZLE : jeu de patience, composé d'un grand nombre d'éléments à assembler pour reconstituer une image

COMPOSITION DE LA PREMIERE PERIODE

**Année Scolaire :
2023-2024**

**Classe : Devoir surveillé :
TSE MATHEMATIQUES**

Durée : 3 Heures

Coef : 04

Exercice 1(04 pts)

4. Linéariser : $\cos^4(7x) \times \sin^3(5x)$
5. Ecrire sous forme trigonométrique le nombre complexe $t = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)^{2018}$
6. Résous dans $\mathbb{C}$, l'équation $z^4 = 8(1 - i\sqrt{3})$
7. Mettre sous forme trigonométrique $z_0 = 1 - e^{i\theta}$; $z_1 = 1 + e^{i\theta}$; $z_2 = 1 + e^{i3\theta}$; $z = \frac{z_0}{z_1}$ et $z' = z_0 \times z_1$ avec $\theta \in]0; \pi[$ (On discutera suivant les valeurs de θ)

Exercice 2 (04 pts)

- Soit α un nombre réel appartenant à $]0; \frac{\pi}{2}[$. On considère l'équation d'inconnue z complexe
(E) : $z^3 - (1 + 2\cos\alpha)z^2 + (1 + 2\cos\alpha)z - 1 = 0$
7. Résous dans $\mathbb{C}$, l'équation (E) sachant que 1 est une solution évidente
8. On désigne par z_1 et z_2 les autres solutions de l'équation (E) telles que $\text{Im}(z_2) < 0$ et $Z = \frac{1}{2}(z_1 - z_2) \times \left(\frac{1}{\sin\alpha}\right)$.
- Détermine les racines quatrièmes de Z sous forme trigonométrique puis sous forme algébrique et représenter leur point image sur le cercle trigonométrique.
9. Préciser le module et un argument de z_1 et z_2 .

Problème(12 pts)

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé (O, I, J), on considère le polynôme complexe

$$f(z) = z^4 - 4z^3 + 30z^2 - 52z + 425 = 0$$

17. Montrer que si z_0 est solution de l'équation $f(z) = 0$ alors $\bar{z}_0$ est aussi solution
18. Calculer $f(-1 + 4i)$. Que peut-on déduire ?
19. En déduire la résolution de l'équation $f(z) = 0$ (On notera z_A la solution qui a ses parties réelle et imaginaire positives ; z_B celle qui a sa partie réelle négative et sa partie imaginaire positive ; z_C celle dont les parties réelles et imaginaire sont négatives et z_D la quatrième solution.
20. Soit A, B, C et D les points images des solutions z_A, z_B, z_C et z_D de l'équation $f(z) = 0$. Placer ces points dans le plan complexe puis en déduire la nature du triangle ABC puis celle du polygone ABCD.
21. Déterminer le périmètre puis l'aire de chacune des figures ABC et ABCD
22. a) Montrer que les points A, B, C et D sont sur un même cercle (Γ) dont-on précisera son centre et son rayon.
- d) En déduire une équation cartésienne de (Γ).
23. Détermine l'abscisse du point G centre de gravité du triangle ABC.

24. On pose $Z = \frac{z - z_B}{z - z_A}$ avec z l'affixe du point M .

- e) Mettre Z sous forme algébrique puis préciser $\operatorname{Re}(Z)$ et $\operatorname{Im}(Z)$.
- f) Déterminer et construire les ensembles des points $M(Z)$ du plan tels que :
 - vii) $|Z| = 1$
 - viii) $|Z| = \frac{2}{3}$
 - ix) $\arg(Z) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi ; k \in \mathbb{Z}$

DEVOIR SURVEILLE DE LA PREMIERE PERIODE

**Année Scolaire :
2023-2024**

**Classe : TSE Matière :
MATHEMATIQUES**

Durée : 3 Heures

Coef : 04

Exercice 1.....(05 points)

4. Ecrire sous forme algébrique le nombre complexe $z = 7 - i + \frac{5}{(1-7i)(i-1)}$
5. Ecrire sous forme trigonométrique le nombre complexe t dans les cas suivants :
- d) $t = \frac{(1+i)^4}{(1+i\sqrt{3})\sqrt{3}-i}$
- e) $t = -2e^{i\frac{2\pi}{3}}$
- f) $t = \frac{1+e^{i\frac{2\pi}{3}}}{1-e^{i\frac{2\pi}{3}}}$
6. a) Déterminer les racines sixièmes de l'unité ; puis les écrire sous formes trigonométrique et algébrique
- b) Calculer $(1-i)^6$
- c) En déduire les racines sixièmes du complexe $T = 8i$ sous formes trigonométriques et algébrique.

Exercice 2.....(05points)

- Soit $\alpha \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. On considère l'équation d'inconnue z complexe
- $(E) : (1+iz)^3(1-itan\alpha) = (1-iz)^3(1+itan\alpha)$
1. Soit z un solution de (E)
- a) Montrer que $|1+iz| = |1-iz|$
- b) En déduire que z est un réel
2. a) Exprimer $\frac{1+itan\alpha}{1-itan\alpha}$ en fonction de $e^{i\alpha}$
- b) Soit z un nombre réel. On pose $z = \tan\varphi$ où $-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$
- Ecrire l'équation portant sur φ traduit (E) et la résoudre
- c) Déterminer les solutions z_1, z_2 et z_3 de (E)

Problème(10 points)

- Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{u}; \vec{v})$ d'unité graphique 1 cm, on considère le polynôme complexe : $f(z) = z^3 - (5+8i)z^2 - (13-32i)z + 57-24i$
1. Montrer que l'équation $f(z) = 0$ admet une solution réelle α
2. Déterminer les complexes p et q tels $f(z) = (z-\alpha)(z^2+pz+q)$
3. En déduire la résolution dans $\mathbb{C}$ de l'équation $f(z) = 0$ (On notera z_A la solution réelle ; z_B la solution non imaginaire dont la partie réelle est positive et z_C la troisième solution)
4. Soient A ; B et C les points d'affixes respectives z_A ; z_B et z_C de l'équation $f(z) = 0$.
- a) Placer les points A , B et C dans le repère puis en déduire la nature du triangle ABC .
- b) Déterminer les coordonnées du point I d'affixes $z = x + iy$ tel que : $|z - z_A| = |z - z_B| = |z - z_C|$

5. Déterminer et construire l'ensemble (Q) des points $M(x; y)$ du plan tel que : $MA^2 + MC^2 = 32$
6. Soit D le point d'affixe $z_D = -1 - 3i$
 - a) Déterminer la nature du polygone ABCD
 - b) Calculer le périmètre et l'aire du polygone ABCD.

EVALUATION DE LA DEUXIEME PERIODE

**Année Scolaire :
2023-2024**

**Classe :
TSE**

**Matière :
MATHEMATIQUES**

Durée : 4 Heures

Coef : 04

Exercice 1.....

Dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes on considère le polynôme complexe

$$f(z) = z^3 - 4z^2 + 6z - 4$$

1. Montrer que l'équation $f(z) = 0$ admet une solution réelle z_0 que l'on déterminera.
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $f(z) = 0$. On notera z_1 et z_2 les deux autres solutions (où z_1 est la solution complexe dont la partie imaginaire est positive)
3. Représenter dans le plan complexe les points M_0 ; M_1 ; M_2 d'affixes respectives z_0 ; z_1 ; z_2 . Montrer que le triangle $M_0M_1M_2$ est rectangle.
4. a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 = z_1$. On donnera les solutions sous forme algébrique et trigonométrique. En déduire les valeurs exactes de : $\cos \frac{\pi}{8}$; $\sin \frac{\pi}{8}$ et $\tan \frac{\pi}{8}$

b) Calculer $(z_1)^{20}$

5. Soit la fonction U_1 restriction de $U: x \mapsto x + \frac{1}{2}\sqrt{4x^2 + 1}$ à l'intervalle $I = [0; 1]$

- a) Montre que U_1 est une bijection de $[0; 1]$ sur un intervalle à préciser
- b) Calcule $(U_1^{-1})\left(\frac{3}{2}\right)$ sans calculer l'expression algébrique de la fonction réciproque
- c) Vérifie les calculs de la question précédente en calculant $(U_1^{-1})(x)$

Exercice 2.....

1. Résous dans $\mathbb{N}^2$, l'équation $x^2(y - 1) = 3$
2. Soit λ et β deux entiers naturels et $n = 2^\lambda \times 3^\beta$. Sachant que le nombre de diviseurs de n^2 est le triple du nombre de diviseurs de n

a) Prouve que $(\lambda - 1)(\beta - 1) = 3$

b) En déduis les valeurs de n

3. Une colonie de vacances compte 63 participants : les filles et les garçons s'y affrontent au cours d'une course d'orientation. L'équipe vainqueur recevra des friandises à partager équitablement entre chacun de ses membres. Pour qu'un tel partage puisse être possible, que les vainqueurs soient les filles ou les garçons, il a fallu prévoir 252 friandises.

Détermine le nombre de filles et de garçons dans cette colonie de vacances.

Problème

Partie A

Soit f la fonction de $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto a \sin 2x + b \cos 2x + c$

1. Déterminer les réels a , b et c telles que f admette un extrémum égal à -1 pour $x = \frac{\pi}{3}$ et vérifie $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0$
2. a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R} : f(x) = 2 \left[\cos \left(2x + \frac{\pi}{3} \right) + 1 \right]$
- b) Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation $f(x) = 0$
3. Etudier les variations de f sur $[0; \pi]$ puis construire sa courbe représentative (C) dans le plan muni d'un repère $(o; \vec{i}; \vec{j})$

Partie B

Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie par :

$$\begin{cases} f(x) = (1-x)\sqrt{1-x^2}, \text{ si } x \leq 1 \\ f(x) = x^2 - 2x + \frac{1}{2} \text{ si } x > 1 \end{cases} \quad \text{et on désigne par } (Cf) \text{ sa courbe représentative dans le}$$

plan muni d'un repère orthonormé $(O: \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique 2 cm)

1. a) Dresse le tableau de variation de la fonction numérique g définie sur $]1; +\infty[$ par :
 $g(x) = 2x^3 - 2x^2 - 1$
b) Démontre que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha \in]1; +\infty[$ et vérifie que $1,28 < \alpha < 1,3$.
c) Détermine le signe de (x) sur $]1; +\infty[$.
2. a) Justifie que l'ensemble de définition Df de f est $[-1; +\infty[$.
b) Etudie la continuité de f en 1.
3. a) Etudie la dérivabilité de f en 1 et en -1 puis donne une interprétation graphique des résultats obtenus.
b) Donne l'ensemble de dérivabilité de f .
4. a) Démontre que :
✓ Pour tout $x \in]1; +\infty[, f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$.
✓ Pour tout $x \in]-1; 1[, f'(x) = \frac{2x^2 - x - 1}{\sqrt{1-x^2}}$.
b) Etudie le signe de f' sur $] - 1; 1[$.
5. Justifie que $f(\alpha) = \frac{3}{2\alpha} - \alpha$ et $-0,146 < f(\alpha) < -0,108$.
6. Dresse le tableau de variation de f sur $]1; +\infty[$.
7. Etudie les branches infinies puis donne l'allure de (Cf) .