

MATHÉMATIQUES

Série : T.S.E

Ce sujet comporte deux pages numérotées 1/2 et 2/2

EXERCICE 1

(7 points)

On considère les intégrales définies $I = \int_0^\pi \cos^4 x dx$ et $J = \int_0^\pi \sin^4 x dx$.

1. a) Montre que l'intégrale I peut s'écrire : $I = \int_0^\pi \cos x (\cos x - \cos x \sin^2 x) dx$.
b) A l'aide d'une intégration par parties, montre que $I = \int_0^\pi \sin^2 x dx - \frac{1}{3}J$.
c) Montre aussi que l'intégrale J peut s'écrire : $J = \int_0^\pi \cos^2 x dx - \frac{1}{3}I$.
2. a) Montre que $I + J = \frac{3\pi}{4}$.
b) Montre que $J - I = 0$.
c) Déduis-en les valeurs des intégrales I et J .

PROBLEME

(13 points)

..

Partie A

On considère la fonction numérique g définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par : $g(x) = \frac{2x}{\sqrt{1+x^2}} - 1$.

1. Calcule les limites de g aux bornes de son domaine de définition.
2. a) Vérifie que pour tout réel x , $g'(x) = \frac{2}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}$.
b) Etudie le sens de variation de g .
c) Dresse le tableau de variation de g .
3. a) Démontre que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution et une seule notée β dans $[0; 2]$.
b) Donne un encadrement de β à 10^{-1} près par la méthode de balayage.
c) Déduis-en le signe de $g(x)$.

Partie B

On considère la fonction g de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par : $f(x) = -\frac{x}{2} + \sqrt{x^2 + 1} + \frac{1}{2}$ et on note (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, I, J) , unité graphique 2 cm.

1. Calcule les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
2. a) On admet que f est dérivable sur $\mathbb{R}$. Démontre que pour tout réel x ,

$$f'(x) = \frac{1}{2}g(x).$$
 b) Déduis-en le sens de variations de f .
 c) Dresse le tableau de variation de f .
3. Démontre que $f(\beta) = \frac{3\beta+1}{2}$, puis calcule $f(\beta)$ pour $\beta = \frac{3}{5}$.
4. Démontre que la droite (D) d'équation $y = \frac{-3x+1}{2}$ est une asymptote oblique à (C) en $-\infty$.
5. Démontre que la droite (D) d'équation $y = \frac{x+1}{2}$ est une asymptote oblique à (C) en $+\infty$.
6. Détermine une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 0.
7. Construis (C) . On prendra soin de tracer d'abord les asymptotes, les tangentes horizontales et la tangente (T) . On prendra $\beta = \frac{3}{5}$.

Partie C

Soit h la restriction de f à l'intervalle $]-\infty, \beta[$.

1. Démontre que h réalise une bijection de $]-\infty, \beta[$ vers un intervalle K que l'on déterminera.
2. a) Dresse le tableau de variations de h^{-1} sur K .
 b) Démontre que h^{-1} est dérivable en $\frac{3}{2}$.
 c) Calcule $(h^{-1})'(\frac{3}{2})$.