

Devoir surveiller de mathématiques

Exercice 1 : (6 points)

On considère le nombre complexe $u = \sqrt{2 - \sqrt{2}} - i\sqrt{2 + \sqrt{2}}$ ($i^2 = -1$)

1. a. Calcule u^2 et u^4
b. Calcule le module et un argument de u^4 ,
c. Déduis-en le module et un argument de u .
2. Représente dans le plan complexe mini d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, unité graphique 2 cm, les points M_0, M_1, M_2 et M_3 d'affixes respectives $u, \bar{u}, -u$ et $-\bar{u}$
3. A tout point M de coordonnées (x, y) du plan, on associe son affixe $z = x + iy$.
Détermine et représente l'ensemble des points M du plan pour lesquels le module du produit $u \times Z$ égal à 4

Exercice 2 : (6 points)

Dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$, on considère le polynôme :

$$f(z) = z^4 - 2(1 + \sqrt{3})z^3 + 2(3 + 2\sqrt{3})z^2 - 4(2 + \sqrt{3})z + 8 = 0$$

1. Soit z_0 et z_1 deux nombres complexes tels que $z_0 = 1 + i$ et $z_1 = 1 - i$.
Calcule $f(z_0)$ et $f(z_1)$. Que peut-on conclure ?
2. Détermine deux réels a et b tels que, pour tout nombre complexe z , on ait :
 $f(z) = (z - z_0)(z - z_1)(z^2 + az + b)$.
3. Achève la résolution de l'équation $f(z) = 0$.
On notera par z_2 la solution dont la partie imaginaire est positive et par z_3 la 4^{ème} solution.
4. Place les points A, B, C et D d'affixes respectives z_0, z_2, z_3 et z_1 dans le plan complexe mini d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, unité graphique 1 cm.
5. Démontre que le quadrilatère (A, B, C et D) est un rectangle puis calcule en cm^2 l'aire de sa surface.

Problème : (8 points)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$ unité graphique 4 cm..

Soit I le point d'affixe 1. On note (C) le cercle de diamètre [OI] et on nomme son centre Ω .

Partie A :

On pose : $a_0 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$ et on note A_0 son image.

1. a. Détermine w , l'affixe du centre de cercle (C) puis r , le rayon du cercle.
b. Montre que le point A_0 appartient au cercle (C).
c. Place le point A_0 puis trace le cercle (C).
2. Soit B le point d'affixe b , avec $b = -1 + 2i$, et B' le point d'affixe b' telle que
 $b' = a_0 b$.

- a. Calcule b'
- b. Place les points B et B'
- c. Démontre que le triangle $B'OB$ est rectangle en B'

Partie B :

Soit a un nombre complexe non nul et différent de 1, et A son image dans le plan complexe. à tout point M d'affixe non nulle, on associe le point M' d'affixe z' telle que $z' = az$.

1. On se propose de déterminer l'ensemble des points A tels que le triangle $M'OM$ soit rectangle en M' .
 - a. Interpréter géométriquement $\arg\left(\frac{a-1}{a}\right)$
 - b. Montrer que $\text{Mes}\left(\widehat{M'O;M'M}\right) = \arg\left(\frac{a-1}{a}\right) + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).
 - c. En déduire que le triangle $M'OM$ est rectangle en M' si et seulement si A appartient au cercle (C) privé de O et de I .
2. Dans cette question, M est un point de l'axe des abscisses, différent de O . On not x son affixe.
Montre que le point M' appartient à la droite (OA) .