

DEVOIR N°1 DE MATHÉMATIQUES**Série :** TSE**Durée :** 2h30**Coef :** 5**Exercice 1 :** (6 points)

1) Donne la forme exponentielle des nombres complexes suivants :

$$\text{a) } z_1 = \frac{5+11i\sqrt{3}}{7-4i\sqrt{3}} \quad \text{b) } z_2 = 1 - i \tan \frac{\pi}{5} \quad \text{c) } z_3 = \sin \alpha + i(1 + \cos \alpha)$$

2) Montre les égalités suivantes, θ étant un réel :

$$\text{a) } 1 + e^{i\theta} = 2 \cos \frac{\theta}{2} e^{i\frac{\theta}{2}} \quad \text{b) } 1 - e^{i\theta} = -2i \sin \frac{\theta}{2} e^{i\frac{\theta}{2}}$$

3) En déduis le module et un argument de :

$$\text{a) } A = 1 + e^{i\frac{\pi}{3}} \quad \text{b) } B = 1 - e^{i\frac{\pi}{4}} \quad \text{c) } C = 2 + \sqrt{2} + i\sqrt{2}$$

4) On pose : $|z| = 2\sqrt{2}$ et $\arg[(-1 - i\sqrt{3})z] = \frac{7\pi}{12}$ Détermine la forme trigonométrique et exponentielle de z **Exercice 2 :** (6 points)

On considère l'application f du plan qui à tout point M , d'affixe z distincte de $2i$, associe le point d'affixe : $z' = \frac{z+i}{z-2i}$

1) Pour $z \neq 2i$, on pose : $z = 2i + re^{i\theta}$, avec $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$.Ecris $z' - 1$ à l'aide de r et θ 2) A est le point d'affixe $2i$ a) Détermine l'ensemble E_1 des points M pour lesquels $|z' - 1| = 3$ b) Détermine l'ensemble E_2 des points M pour lesquels $\arg(z' - 1) = \theta[2\pi]$ c) Représente les ensembles E_1 et E_2 **Problème :** Les parties I ; II et III sont indépendantes (8 points)I. Résous dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, l'équation :

$$2z^2 - 2(1+i)z + \frac{1}{2} + i = 0$$

II. Soit θ un réel $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ et (E_θ) l'équation :

$$2z^2 - (1 + 2\cos \theta + 2i)z + \cos \theta + i = 0 \text{ avec } z \in \mathbb{C}$$

1) Démontre que l'équation (E_θ) admet une racine réelle que tu calculeras2) Calcule l'autre racine en fonction de θ 3) Dans le plan complexe rapporté à un repère direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$, on considère les points A et M d'affixes respectives $\frac{1}{2}$ et $\cos \theta + i$ a) Détermine l'ensemble des points M lorsque le réel θ varie dans l'intervalle $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ b) Calcule AM en fonction de θ et déduis-en la valeur de θ pour laquelle la distance AM est minimaleIII. Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^3 = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$