

LYCEE BAMINATA COULIBALY (L.BAC)

Comité Pédagogique de Mathématiques

Année d'étude 2022 – 2023

DEVOIR DE MATHÉMATIQUES**SERIE : TSE****DURÉE : 3H****COEFF : 5**
☐ Ce Sujet est composé de deux exercices et un problème, tous obligatoires.

☐ Toute trace de recherche ou d'initiative raisonnable, même incomplète ou non fructueuse, sera récompensée.
EXERCICE 1 : (5 Points)**Consigne** : Dire preuve à l'appui si les es propositions suivantes sont vraies ou fausses.**Proposition 1** : Soit $z \in \mathbb{C}^*$ $|-i\bar{z}| = |z|$ et $Arg(-i\bar{z}) = -\left[\frac{\pi}{2} - Arg(z)\right]$ **1pt****Proposition 2** : $Z = (3 + i\sqrt{3}) \left(\cos \frac{\pi}{5} - i \sin \frac{\pi}{5}\right)^2 e^{-i\left(\frac{7\pi}{6}\right)} = \left(\cos \frac{7\pi}{5} - i \sin \frac{7\pi}{5}\right)$ **1pts****Proposition 3** : $Z' = 1 - \sqrt{2} - i(1 - \sqrt{2})$ $|Z'| = \sqrt{2} - 2$ et $Arg(Z') = \frac{\pi}{4}$ **1pt****Proposition 4** : $\forall x \in \mathbb{R} - \{k\pi\}$ $\frac{i(\cot gx) - 1}{i(\cot gx) + 1} = e^{i2x}$ **1pt****Proposition 5** : Le complexe $Z'' = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ est racine 6^e de l'unité. **1pt****EXERCICE 2 : (7 Points)****A-** Le plan complexe ($\mathcal{P}$) est rapporté au repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. Unité graphique **1cm**.Soient les points A, B et C d'affixes respectives $-3, Z$ et i **1-** Donne une interprétation complexe de $\frac{AB}{AC}$ et $mes(\widehat{AC}, \widehat{AB})$ **1pt****2-** On suppose que le point $B(Z)$ est tel que
$$\begin{cases} AB = \frac{\sqrt{3}}{5} AC \\ mes(\widehat{AC}, \widehat{AB}) = \theta \text{ où } \theta \in \left] \frac{\pi}{2}, \pi \right[\end{cases}$$
a- Calcule $\cos \theta$ sachant que $\sin \theta = \frac{\sqrt{15}}{4}$ **0.5pt****b-** Calcule $\left| \frac{Z+3}{i+3} \right|$ puis précise $Arg\left(\frac{Z+3}{i+3}\right)$ **1pt****c-** En déduire la forme trigonométrique de $\frac{Z+3}{i+3}$ **1pt****d-** Démontre par déduction de la question précédente que $\frac{Z+3}{i+3} = \frac{-\sqrt{3}+3i\sqrt{5}}{20}$ **1pt****e-** En deduire la valeur de Z . **0.5pt****B-** Soit l'équation $(E) = iz^2 - 2(i + \sin \theta)z + 2\sin \theta = 0$; $\theta \in]-\pi, \pi[$ **1-** Résous l'équation (E) dans $\mathbb{C}$. **1pt****2-** Détermine le module et un argument de chacune des solutions. **1pt**

PROBLEME : (8 Points)

I- Soit le polynôme complexe P défini par

$$P(z) = iz^4 - 3(i-1)z^3 + (i-5)z^2 + (-1+9i)z + 7 + 4i$$

- 1- Prouve que i et -1 sont solutions de l'équation $P(z) = 0$ **1pt**
- 2- Détermine les complexes a, b et c pour que $P(z) = (z+1)(z-i)(az^2 + bz + c)$ **1pt**
- 3- En déduire la résolution dans $\mathbb{C}$ de l'équation $P(z) = 0$ des questions précédentes **1pt**

II- Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{u}, \vec{v})$ unité graphique **1 centimètre**

On désigne par A, B, C et D les points d'affixes respectives les $i, 2+3i, 2-i$ et -1

- 1- Démontre que le triangle ABC est isocèle et rectangle en A . **0.5pt**
- 2- Soit (Γ) l'ensemble des points $M(z)$ vérifiant $z\bar{z} + i(z - \bar{z}) = 7$
 - a- Vérifie que le point B appartient à (Γ) **0.75pt**
 - b- On pose $z = x + iy, (x, y) \in \mathbb{R}^2$. Démontre que $M(z) \in (\Gamma) \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2y = 7$. **0.75pt**
 - c- En déduire la nature et ses éléments caractéristiques **0.75pt**
- 3- Place les points A, B, C et D et représente (Γ) **1pt**
- 4- NB : Une symétrie centrale est une homothétie du même centre et de rapport $k = -1$

Soit B' image de B par la symétrie centrale de centre A

 - a- Calcule l'affixe du point B' . **0.75pt**
 - b- Justifie que $\text{Mes}(\widehat{B'C, B'B}) = \frac{\pi}{4}$ **0.5pt**

« La rapidité, l'extrême vigilance et l'ingéniosité seront vos meilleurs atouts. »