

Devoir écrit N°1 Epreuve de Mathématiques

Série : Terminale Sciences Exactes (T.S.E)

Durée : 03 Heures

Coefficient : 05

EXERCICE 1 :- ----- (6 points)

On considère le nombre complexe u définie par :

$$u = \frac{3-i}{2+i} + \frac{2+i}{i} - 3(1-2i)^2 - 2(2+i)(3+i)$$

1. Ecris u sous la forme algébrique

2. Résous dans $\mathbb{C}^2$ le système d'inconnue z_1 et z_2 :
$$\begin{cases} iz_1 - z_2 = -1 + i \\ \frac{1}{2}z_1 + (1-i)z_2 = 2 - 5i \end{cases}$$

3. On considère, dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$, les points A et B d'affixes respectives : $z_A = -2i$ et $z_B = 3 - i$.

On considère l'application f définie de $P - \{A\}$ dans P qui, à tout point M d'affixe z , associe le point M' d'affixe z' telle que $z' = \frac{iz-3i-1}{z+2i}$

a. Soit C le point d'affixe $u = 1 - i$. Calcule l'affixe u' de C' image de C par f

b. Montre que $z' = \frac{i(z-3+i)}{z+2i}$

c. Interprète géométriquement le module et un argument de z'

d. Dédus de la question 3.c. les ensembles des points suivants :

- L'ensemble (E_1) tel que $z' \in \mathbb{R}^*$
- L'ensemble (E_2) tel que $z' \in i\mathbb{R}^*$
- L'ensemble (E_3) tel que $|z'| = 1$

EXERCICE 2 :- ----- (6 points)

Dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, on considère l'équation

$$(E): z^4 + z^3 + z^2 - 4z + 10 = 0$$

1. Montre que si le complexe z_0 est solution de l'équation (E) alors il en est de même pour son conjugué $\overline{z_0}$.

2. Vérifie que le complexe $z_0 = 1 + i$ est une solution de l'équation (E) . En déduis alors la seconde solution z_1

3. Factorise l'équation (E) en produit de deux polynômes du second degré.

4. Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) .

EXERCICE 3 :- ----- (8 points)

I. On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

$$(E_1): z^2 - (1+7i)z - 8 + 11i = 0 \quad ; \quad (E_2): z^2 - (7+5i)z + 15i = 0$$

1. a. Détermine les racines carrées de $u = 24 + 10i$

b. Développe : $(3 - 5i)^2$

2. Résous dans $\mathbb{C}$ les équations (E_1) et (E_2)

II. Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$, on considère les points A, B, C et D d'affixes respectives :

$$z_A = 2 + i ; z_B = 1 + 2i ; z_C = 6 + 3i \text{ et } z_D = -1 + 6i$$

1. Place les points A, B, C et D dans le repère $(O; \vec{u}; \vec{v})$,
2. a. Détermine l'écriture complexe de la similitude directe f telle que $f(A) = B$ et $f(C) = D$
b. Détermine la nature de la similitude directe f et précise ses éléments caractéristiques
3. Soit J le point d'affixe $z_J = 3 + 5i$

Montre que la rotation r de centre J et d'angle $-\frac{\pi}{2}$ transforme A en D et C en B

4. Soit I le point d'affixe $z_I = 1 + i$ et soient M et N les milieux respectifs des segments $[AC]$ et $[BD]$

En utilisant les résultats précédents détermine la nature du quadrilatère $IMJN$

5. On considère les points P et Q tels que les quadrilatères $IAPB$ et $ICQD$ soient des carrés de sens direct.

- a. Détermine les affixes z_P et z_Q des points P et Q
- b. Détermine les rapports : $\frac{IP}{IA}$ et $\frac{IQ}{IC}$ ainsi qu'une mesure de chacun des angles orientés $(\vec{IA}; \vec{IP})$ et $(\vec{IC}; \vec{IQ})$. En-déduis les éléments caractéristiques de la similitude directe g telle que $g(A) = P$ et $g(C) = Q$

Il sera tenu compte de la présentation !-Il ne sera pas tenu compte des réponses non justifiées !