

Lycée Privé Hella Diallo	Classe : TSE	Année Scolaire : 2023-2024
Durée : 3H	Devoir de : Mathématiques	Coefficient : 5

Exercice 1 : 5 points

- 1) Ecrire sous forme algébrique et trigonométrique le nombre complexe

$$z = \left[\frac{1+i-\sqrt{3}(1-i)}{1+i} \right]^2 \quad (1,5 \text{ point})$$

- 2) A quelle condition sur l'entier naturel n le nombre $(-1 + i)^{2n}$ est-il un nombre réel strictement positif. (1 point)
- 3) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^6 = (1 + i)z^2$ (1,5 point)
- 4) Linéariser $\sin 2x \cos^3 x$. (1 point)

Exercice 2 : 5 points

On considère dans $\mathbb{R}_+^2$ le système suivant :

$$(S) : \begin{cases} \sqrt{x} \left(1 + \frac{1}{x+y} \right) = \frac{12}{5} \\ \sqrt{y} \left(1 - \frac{1}{x+y} \right) = \frac{4}{5} \end{cases}$$

- 1) soit $(x, y) \in \mathbb{R}_+^2$ une solution du système (S). On pose $z = \sqrt{x} + i\sqrt{y}$.

- a) Montrer que $z + \frac{1}{z} = \frac{12}{5} + \frac{4}{5}i$ (2 points)

- b) Montrer que $z^2 - \left(\frac{12}{5} + \frac{4}{5}i \right) z + 1 = 0$. En déduire les valeurs possibles de z . (1,5 point)

(On remarque que $\frac{28}{25} + \frac{96}{25}i = \left[\frac{2}{5}(4 + 3i) \right]^2$)

- c) En déduire les valeurs du couple (x, y) . (0,75 point)

- 2) Résoudre dans $\mathbb{R}_+^2$ le système (S). (0,75 point)

Problème : 10 points

Partie A : Le plan est rapporté au repère orthonormé $(o, \vec{u}, \vec{v})$. On note A et B les points d'affixes respectives $4 + 2i$ et i .

On considère l'application f qui à tous points $M(z)$ différents de B, associe le point $M(z')$

définie par : $z' = \frac{-iz - 2 + 4i}{z + i}$

- 1) Interpréter géométriquement le module de z' puis l'argument de z' . (1 point)

- 2) Déterminer $Re(z')$ et $Im(z')$ en fonction de $x = Re(z)$ et $y = Im(z)$. (1 point)

- 3) Déterminer puis construire les ensembles suivants :

- (E_1) Ensemble des points M tels que $|z'| = 1$. (1 point)
- (E_2) Ensemble des points M tels que z' soit imaginaire pur. (1 point)
- (E_3) Ensemble des points M tels que z' soit réel. (1 point)

- 4) On pose $Z = z + i$ et $Z' = z' + i$

Vérifier que $ZZ' = -3 + 4i$ puis calculer $|ZZ'|$. (1 point)

- 5) Déterminer l'ensemble décrit par les points M' lorsque M décrit un cercle de centre B et de rayon r (1 point)

- 6) Déterminer r pour que M et M' soit sur un même cercle. (0,5 point)

- 7) Déterminer les ensembles suivants :

- $\arg(\bar{z}) = \arg(-z)[2\pi]$ (1 point)
- $\arg \frac{z-4-2i}{z-i} = \frac{\pi}{2}[\pi]$ (0,75 point)
- $\arg \frac{z-4-2i}{z-i} = 0[2\pi]$ (0,75 point)