

DUREE : 3H

TSE

COEF : 4

EXERCICE 1 : (5 points)**Consigne :** Dire preuve à l'appui si les propositions suivantes sont vraies ou fausses.**Proposition 1 :** $-\frac{\pi}{2}$ et 2 sont respectivement l'argument et le module de $z = \frac{5-5i}{10e^{i\frac{\pi}{4}}}$ **1pt****Proposition 2 :** $\frac{(1-i)(1+i\sqrt{3})}{2\sqrt{2}} = e^{i\frac{\pi}{12}}$ et $tg \frac{\pi}{12} = 2 - \sqrt{3}$ **1pt****Proposition 3 :** $\left(\cos \frac{23\pi}{4} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^4 = -1$ **1pt****Proposition 4 :** $\exists (x, y) \in \mathbb{R}^2$ et $u = (x + iy) \in \mathbb{C}$ tels que $u^2 = \frac{28}{25} + \frac{96}{25}i$ **1pt****Proposition 5 :** L'équation (E) : $z^3 + (2 - 4i)z^2 + (3 - 9i)z - 4 - 12i = 0$ d'inconnue complexe z admet une solution imaginaire pure. **1pt****EXERCICE 2 :** (5 points)**I-** On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation paramétrique $(E_m) : Z^2 - (1 - i)(m + 1)Z - i(m^2 + 1) = 0$ où m est un paramètre complexe**1- a-/** Montre que $\Delta = [(1 + i)(m - 1)]^2$ **0,5pt****b-/** Résous l'équation (E_m) dans $\mathbb{C}$ **0,75pt****c-/** Écris sous forme trigonométriques les valeurs de m pour que le produit des deux solutions de (E_m) soit égal à 1 **0.75pt****2-** On pose $Z_1 = 1 - im$ et $Z_2 = m - i$ Ecris Z_1 et Z_2 sous forme trigonométrique dans le cas où $m = e^{i\theta}$; $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ **1pt****II-** Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{u}, \vec{v})$ On désigne par M, M_1 , et M_2 les points d'affixes respectives $m, Z_1 = 1 - im$ et $Z_2 = m - i$ **1-** Détermine l'ensemble des points $M(m)$ pour que les points M, M_1 , et M_2 soient alignés. **0.75pt****2-** Soit f la transformation qui fait correspondre à tout point $M(z)$ le point $M'(z')$ tel que $z' = 1 - iz$ **a- /** Détermine la nature et les éléments caractéristiques de f (on notera $\Omega(\omega)$ le centre) **0.75pt****b- /** Montre que $\frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 - m}$ est imaginaire pure si et seulement si $\Re(m) + \Im(m) = 1$ **0.75pt**

PROBLEME :**(10 points)**

Le plan complexe $(\mathcal{P})$ est rapporté au repère orthonormal $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ Unité graphique **2cm**

On désigne par A, B et C les points d'affixes respectives les $2i, 3+i, -1-i$

Soit f l'application du plan $(\mathcal{P})$ dans $(\mathcal{P})$ qui à tout point $M(z)$ associe le point $M'(z')$ telle que :

$$f(M) = M' \Leftrightarrow z' = \frac{(1-i)z+2}{z-3-i}$$

- 1- Détermine le domaine plan de définition de f **0.75pt**
- 2- Détermine l'ensemble des points invariants par f **1pt**
- 3- Détermine l'image A' du point A par f **0.75pt**
- 4- Montre que pour tout $z \neq 3+i$, on a $z' = (1-i) \frac{z+1+i}{z-3-i}$ **0.75pt**
- a-/ En déduire et construis l'ensemble (E) des points $M(z)$ tel que $|z'| = \sqrt{2}$ **1pt**
- b-/ En déduire et construis l'ensemble (F) des points $M(z)$ tel que $\arg(z') = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ **1.25pts**
- 5- Soit le cercle $\mathcal{C}(B, 2)$ (Cercle de centre B et de rayon 2). Ecris l'équation complexe de $(\mathcal{C})$ **0.5pt**
- a-/ Démontre que pour tout $z \neq 3+i$, $|z' - 1 + i| \times |z - 3 - i| = \sqrt{29}$ **1pt**
- b-/ En déduire le lieu géométrique du point $M'(z')$ lorsque le point $M(z)$ parcourt le cercle $(\mathcal{C})$ **1pt**
- 6- Détermine et construis dans un second repère orthonormé l'ensemble des points $M(Z)$ tels que :
 - a. $(G) : \arg\left(\frac{Z-2i}{1+i}\right) = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ **1pt**
 - b. $(H) : |Z + 1 + i| < 1$ **1pt**

« La rapidité, vigilance et l'ingéniosité seront vos meilleurs atouts . »

« Seul l'effort fait les forts »