

DEVOIR SURVEILLÉ DE MATHÉMATIQUES**Exercice 1 : -----[7 points]**

1) Linéarise $z_1 = \cos^3\left(\frac{2x}{5}\right) \sin^3\left(\frac{2x}{5}\right)$. (0,5pt)

2) Ecris sous la forme algébrique $z_2 = \frac{4-4i}{(\sqrt{3}-3)+i(\sqrt{3}-1)}$ (on simplifiera le plus possible les parties réelle et imaginaire de z_2). (0,5pt)

3) Ecris sous la forme trigonométrique $z_3 = \frac{-32i\left(\cos\frac{7\pi}{15}+i\sin\frac{7\pi}{15}\right)}{\left(\cos\frac{\pi}{5}-i\sin\frac{\pi}{5}\right)(-1+i\sqrt{3})^2}$ et $z_4 = 1 + i(1 - \sqrt{2})$. (1pt)

4) Résous dans $\mathbb{C}$:

a) $z^2 - 2(1 - i\sqrt{3})z - 2(1 + i\sqrt{3}) = 0$ (0,5pt)

b) $(z^2 - 4z)^2 + (4z - 10)^2 = 0$ (0,75pt)

c) $2|z| - 7z = -11 + 28i$ (0,75pt)

d) $(z - i)^5 = (z + i)^5$ (0,75pt)

e) $iz^2 - 2(i + \sin \theta)z + 2 \sin \theta = 0$ avec $\theta \in]-\pi; \pi[$ (0,75pt)

5) On donne $u = \sqrt{2 - \sqrt{3}} - i\sqrt{2 + \sqrt{3}}$.

a) Ecris u^2 sous la forme algébrique puis sous la forme trigonométrique. (1pt)

b) Dédus-en le module et un argument du nombre complexe u . (0,5pt)

Exercice 2 : -----[5 points]*Les parties A et B sont indépendantes.*A. Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{u}; \vec{v})$ d'unité graphique 1 cm.On considère le polynôme complexe $p(z) = z^4 + 2z^3 - z^2 - 2z + 10$.1. Démontre que si z_0 est une solution de l'équation $p(z) = 0$, alors $\bar{z}_0$ est aussi une solution de cette équation. (0,5pt)2. Calcule $p(1 - i)$. (1pt)3. Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation $p(z) = 0$. (1pt)B. Au nombre complexe z de module 1 et d'argument $\theta \in \mathbb{R}$, on associe le nombre complexe

$$z' = z + 1 + \frac{2z+1}{z^2+z+1}$$

1. Détermine l'ensemble E des nombres complexes pour lesquels z' existe. (0,5pt)2. Démontre que $\bar{z} = \frac{1}{z}$ et $z' = z + 1 + \frac{2+\bar{z}}{z+\bar{z}+1}$ pour tout z appartenant à E . (0,5pt)3. Dédus-en la forme algébrique de z' en fonction de $\cos \theta$ et $\sin \theta$. (0,5pt)4. Détermine les valeurs de θ pour lesquelles z' est réel. (0,5pt)5. z' peut-il être imaginaire pur ? Justifie ta réponse. (0,5pt)

Problème : -----[8 points]

Le champ de Moussa est un quadrilatère de sommets A, B, C et D .

Un technicien agricole lui conseille d'installer son forage à un point I dans le champ équidistant des quatre sommets. Moussa se sert de ces connaissances mathématiques pour assimiler son champ à un plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{u}; \vec{v})$.

Par la suite, $z_A; z_B; z_C$ et z_D désignent respectivement les affixes des points A, B, C et D .

z_C est la solution imaginaire pure et z_A la solution de partie imaginaire positive de l'équation $(E) : z \in \mathbb{C}; z^3 - (5 - i)z^2 + (5 - 8i)z + 3 + 5i = 0$.

z_A et z_B ont la même partie réelle et $\frac{z_B - 4 - 3i}{z_B + 4 + i}$ est un imaginaire pur non nul.

D est l'image de B par la rotation de centre $\Omega(1; -1)$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

1. a) Détermine la solution imaginaire pure de (E) puis résous (E) dans $\mathbb{C}$.

Déduis-en z_A et z_C . **(1,5pt)**

- b) On pose $z_B = x + iy$ où x et y sont des nombres réels.

Ecris sous la forme algébrique $\frac{z_B - 4 - 3i}{z_B + 4 + i}$ et déduis-en z_B . **(0,75pt)**

2. Détermine l'écriture complexe de la rotation de centre $\Omega(1; -1)$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

Déduis-en z_D . **(0,75pt)**

3. Détermine la distance du forage aux sommets du champ arrondie au centième près. **(0,5pt)**

4. Pour tout nombre complexe $z \neq -i$, on pose $z' = \frac{iz + 1 - 4i}{z + i}$.

Détermine l'ensemble des points M du plan d'affixe z tel que :

a. $|z'| = 1$ **(0,75pt)**

b. $|z'| = \frac{3}{2}$ **(0,75pt)**

c. $|(1 + i\sqrt{3})z - \sqrt{3} + i| = 2|\bar{z} - 4 - i|$ **(0,75pt)**

d. $\arg(z') = \pi + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$ **(0,75pt)**

5. a) Exprime $z' - i$ en fonction de z puis démontre que $|z' - i| = \frac{2\sqrt{5}}{|z + i|}$. **(1pt)**

- b) Détermine l'ensemble des points $M'(z')$ lorsque $M(z)$ parcourt le cercle (Γ) de centre C et de rayon $\sqrt{5}$. **(0,5pt)**