



Le cerveau n'est un ventre qui engloutit et qui digère mais un monde qui s'enrichit de ses propres efforts

Exercice 1 :(4.25)

I// α et β sont 2 entiers naturels et $N = 2^\alpha \times 3^\beta$ tel que le nombre de diviseurs de N^2 est le triple du nombre de diviseurs de N.

a) Prouve que $(\alpha - 1)(\beta - 1) = 3$ (0.75)

b) En déduire les valeurs de N. (0.75)

II // 1°) Résoudre dans $\mathbb{N}^2$ l'équation : $7x - 4y = 4$ (0.75)

2°) Un entier naturel a s'écrit $\overline{75}$ dans la base x et $\overline{49}$ dans la base y .

Un entier naturel b s'écrit $\overline{310}$ dans la base x et $\overline{125}$ dans la base y .

Détermine x et y puis a et b. (2)

Exercice 2 : 3 Pts

I// Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

a) $3x - 5y = 6$ (1)

b) $\begin{cases} 3x - 5y = 6 \\ y \equiv x^2[5] \end{cases}$ (1)

II// Soit q et r le quotient et le reste de la division euclidienne d'un entier naturel a par un entier naturel b.

Sachant que $a + b + r = 3025$ et $q = 50$;rétablir la division (1)

Problème :(12,75Pts)

A// Dans cet exercice, on pourra utiliser le résultat suivant

“Etant donnée 2 entiers naturels a et b non nuls. Si $\text{pgcd}(a, b) = 1$ alors $\text{pgcd}(a^2, b^2) = 1$ ”

Une suite (S_n) est définie pour $n > 0$ par $S_n = \sum_{p=1}^n p^3$, on se propose de calculer , $\forall n \in \mathbb{N}^*$, le $\text{pgcd}(S_n; S_{n+1})$

1) Démontre que, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ on a $S_n = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2$ (1)

2) Etude du cas ou n est pair :

Soit $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $n = 2k$

- a) Démontre que $\text{pgcd}(S_{2k}; S_{2k+1}) = (2k + 1)^2 \text{pgcd}[k^2; (k + 1)^2]$ (1)
- b) En déduire $\text{pgcd}(S_{2k}; S_{2k+1})$ (0.75)
- c) Montre que k et $k + 1$ sont premiers entre eux (0.75)
- 3) Etude du cas où n est impair, Soit $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $n = 2k + 1$
 - a) Démontre que $2k + 1$ et $2k + 3$ sont premiers entre eux. (0.75)
 - b) Détermine-le $\text{pgcd}(S_{2k+1}; S_{2k+2})$ (1)
- 4) En déduire des questions précédentes qu'il existe une unique valeur de n , que l'on déterminera, pour laquelle S_n et S_{n+1} sont premiers entre eux. (0.75)

B// Le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \tilde{u}, \tilde{v})$, on considère les points A et I d'affixes respectives $Z_A = \sqrt{3} + 2i$ et $Z_I = i$. Soit (L) le cercle de centre I et de rayon $r = 2$.

- 1.a) Montre que le point A appartient au cercle (L) . (1)
- b) Faire une figure (on complètera la figure au fur et à mesure) (1)

2. Soit R la transformation qui à tout point d'affixe $z = x + iy$ associe le point M' d'affixe $z' = x' + y'i$, où $x, x'; y$ et y' des nombres réels, tel que $\begin{cases} x' = 1 - y \\ y' = 1 + x \end{cases}$

On désigne par B l'image du point A par R.

- a) Exprime z' en fonction de z . (1)
 - b) Caractérise alors la transformation R. (0.75)
 - c) Montre que $z_B = -1 + i(1 + \sqrt{3})$ (0.75)
3. Calcule l'affixe du point C symétrique du point A par rapport au point I. (0.75)
4. Quelle est la nature du triangle ABC ? Justifier ta réponse. (0.75)
5. Calcule la surface du triangle ABC. (0.75)

Bonne Chance