

DEVOIR SURVEILLÉ DE MATHÉMATIQUES**Exercice 1 : -----[6 points]**

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{u}; \vec{v})$ d'unité graphique 1 cm.

On considère le polynôme complexe $f(z) = z^4 - 2z^3 + 15z^2 - 14z + 130$.

- Démontre que si z_0 est une solution de l'équation $f(z) = 0$, alors $\bar{z}_0$ est aussi une solution de cette équation. **(0,25pt)**
- Calcule $f(2 + 3i)$ puis résous dans $\mathbb{C}$ l'équation $f(z) = 0$. **(1,5pt)**
- Déduis-en les réels a, b, c et d tels que : $f(z) = (z^2 + az + b)(z^2 + cz + d)$. **(0,5pt)**
- Soit les points A, B, C et D images respectives des solutions z_A, z_B, z_C et z_D de l'équation $f(z) = 0$ telles que $Re(z_A) = Re(z_D) > 0$ et $Im(z_A) = Im(z_B) > 0$ où Re désigne la partie réelle et Im la partie imaginaire.
 - Détermine la nature du triangle ABC . **(0,5pt)**
 - Démontre que les points A, B, C et D sont sur un même cercle dont on précisera le centre et le rayon. **(0,5pt)**
 - Détermine la nature du quadrilatère $ABCD$ puis calcule le périmètre et l'aire de $ABCD$. **(0,75pt)**
- Détermine et construis l'ensemble des points M d'affixe z du plan tels que :
 - $MA^2 + MB^2 = 26$ **(0,5pt)**
 - $\frac{MA}{MB} = \frac{2}{3}$ **(0,5pt)**
 - $\arg(z - 2 + 3i) = \frac{\pi}{6} [\pi]$ **(0,5pt)**
 - $\arg\left(\frac{z-2+3i}{z+1+3i}\right) = -\frac{\pi}{2} [2\pi]$ **(0,5pt)**

Exercice 2 : -----[4 points]

- Détermine les entiers relatifs n tels que la fraction $\frac{n+5}{n-2}$ soit un entier relatif. **(0,5pt)**
- Démontre que : $\forall n \in \mathbb{N}; \frac{12n+1}{30n+2}$ est irréductible. **(0,5pt)**
- Soit N un entier naturel tel que $N = \overline{a0b}^5$ et $N = \overline{bac}^7$.
Détermine les entiers naturels a, b et c . **(0,5pt)**
- Ali sait qu'il a entre 255 et 350 livres. S'il fait des tas de 17 livres, il lui en reste 15. S'il fait des tas de 29 livres, il lui en reste 9. Combien a-t-il de livres ? **(1,5pt)**
- Les élèves d'une classe de TSE cotisent pour acheter un gâteau qui coûte 10 000 FCFA. Pour avoir exactement cette somme, les garçons cotisent chacun 450 FCFA et les filles 350 FCFA chacune.
Détermine le nombre de garçons et de filles de cette classe. **(1pt)**

Problème : -----[10 points]

Soit f la fonction définie par $f(x) = |x + 2| + \frac{4}{(x-2)^2}$ et (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$

1. a) Détermine l'ensemble de définition de f . **(0,5pt)**
b) Ecris $f(x)$ sans le symbole de la valeur absolue. **(0,5pt)**
2. a) Etudie la continuité de f en -2 . **(0,5pt)**
b) Etudie la dérivabilité de f en -2 et interprète géométriquement les résultats obtenus. **(1pt)**
c) Calcule les limites de f aux bornes de son ensemble de définition. **(1pt)**
d) Montre que les droites (D_1) et (D_2) d'équations respectives $y = -x - 2$ et $y = x + 2$ sont asymptotes à (C) respectivement en $-\infty$ et en $+\infty$. **(0,5pt)**
3. Montre que
$$\begin{cases} f'(x) = \frac{-x(x^2-6x+12)}{(x-2)^3} \text{ pour } x \in]-\infty; -2[\\ f'(x) = \frac{(x-4)(x^2-2x+4)}{(x-2)^3} \text{ pour } x \in]-2; 2[\cup]2; +\infty[\end{cases} \quad \textbf{(1pt)}$$
4. Etudie le signe de $f'(x)$ puis dresse le tableau de variation de f . **(1,5pt)**
5. Soit g la restriction de f sur l'intervalle $[4; +\infty[$.
 - a) Montre que g est une bijection de $[4; +\infty[$ vers un intervalle J que l'on précisera. **(0,5pt)**
 - b) La bijection réciproque g^{-1} de g est-elle dérivable en 7 ? Justifie ta réponse. **(0,5pt)**
 - c) Démontre que l'équation $g(x) = 8$ admet une solution unique $\alpha \in [4; +\infty[$ puis donne un encadrement de α à 10^{-1} près. **(0,5pt)**
 - d) Exprime $(g^{-1})'(8)$ en fonction de α . **(0,25pt)**
 - e) Calcule $g(5)$ puis détermine l'équation de la tangente à la courbe (C') de g^{-1} au point d'abscisse $\frac{67}{9}$. **(0,75pt)**
6. Construis la courbe (C) de f puis déduis-en la courbe (C') de g^{-1} . **(1pt)**