

Évaluation sommative 1

Exercice 1

Soient A et B les points d'affixes respectives $z_A = 2 - \frac{1}{2}i$ et $z_B = -3 + 2i$.

A tout nombre complexe z différent de $-3 + 2i$, on associe le nombre complexe z' tel que $z' = \frac{z-2+\frac{1}{2}i}{z+3-2i}$.

1. Détermine l'ensembles des points invariants de cette transformation.
2. Détermine puis construis l'ensembles des points M tel que :
 - a. $|z'| = 0$.
 - b. $|z'| = 2$.
 - c. Les points z' appartiennent un cercle de centre O et de rayon 1.
 - d. z' est un nombre réel.
 - e. z' est un nombre imaginaire pur.

Exercice 2

Détermine le module et un argument de chacun des nombres complexes suivants :

1. $z_1 = i \sin \frac{2\pi}{3} + 1 + \cos \frac{\pi}{3}$.
2. $z_2 = 1 + \cos \frac{5\pi}{6} - i \sin \frac{5\pi}{6}$.
3. $z_3 = 1 + e^{ix} + e^{i2x} + e^{i3x}$.
4. $z_4 = \cos \frac{3\pi}{4} + i \cos \frac{5\pi}{4}$.

Exercice 3

On donne l'équation (E): $z^3 - (3 + i)z^2 + (6 + 3i)z - 18 = 0$.

1. Montre que l'équation (E) admet une solution réelle et deux solutions imaginaires pur dont-on déterminera.
2. Soient le point A représentant la solution imaginaire pur positif, le point B représentant la solution réelle et C le point représentant la solution imaginaire pur négatif de l'équation (E). Et soit D le point d'affixe $z_D = 1 + 3i$.

- a. Montre que les points A, B, C et D appartiennent à un même cercle dont on déterminera le centre, le rayon et une équation.
 - b. Trace ce cercle dans un repère orthonormé $(O; \vec{e}_1; \vec{e}_2)$.
3. Une transformation f du plan est tels que $f(A) = A$ et $f(C) = B$.
- a. Détermine la nature et les éléments caractéristiques de cette transformation.
 - b. Trouve l'image du point D par cette transformation.