

Évaluation sommative 1

Exercice 1

En vue de réaliser un parc d'attraction, le conseil communal de Dodji a initié un concours circonscrit aux élèves des collèges de la commune et visant à recueillir leurs projets d'architecture du parc. Dossou, un élève en classe terminale D, décide d'y participer. Il imagine un parc circulaire, traversé par une grande voie rectiligne, deux lampadaires géants, plusieurs voies secondaires ainsi qu'une rubrique « embellissement » où il suggérerait de planter une fleur dont il a lu l'extraordinaire qualité d'expansion dans une revue spécialisée.

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$, le pourtour (γ) du domaine circulaire, la voie rectiligne et les deux lampadaires sont définis de la façon suivante :

Etant donné un nombre complexe z d'écriture algébrique $z = x + iy$, avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, différent de $-2 - 3i$, et en notant $f(z)$ le nombre complexe $\frac{z-4-3i}{z+2+3i}$,

- (γ) est l'ensemble des points M d'affixe z tels que $f(z)$ soit un nombre imaginaire,
- (Δ) est l'ensemble des points M d'affixe z tels que $f(z)$ soit un nombre réel,
- Les deux lampadaires sont représentés par les points A et B d'affixes z_A et z_B tels que $z_A = f(-2 - i)$ et $f(z_B) = -i$.

Dossou veut formaliser son projet et y mettre un dessin de tout ce qu'il a conçu ainsi que les résultats de l'étude sur l'évolution de la fleur à planter.

Tâche : tu es invité(e) à répondre aux préoccupations de Dossou en résolvant les trois problèmes ci-après.

Problème 1

1. Détermine z_A et z_B .
2. Détermine la partie réelle et la partie imaginaire de $f(z)$ en fonction de x et de y .
3. a) Démontre que (γ) est une partie d'un cercle dont tu préciseras le centre et le rayon.

b) Détermine (Δ) .

c) Construis (Δ) , (γ) et les points A et B sur une même figure.

Problème 2

Détermine puis construis l'ensembles des points M tel que

1. $|f(z)| = 3$.
2. $|z - z_A| = |z_B|$.
3. $\arg(\bar{z} - z_B) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi]$.

Problème 3

Soit g la transformation du plan qui transforme A en B.

Détermine l'écriture complexe de g selon que :

1. g est une translation.
2. g est une homothétie de rapport $k = 2$.
3. g est une rotation d'angle $\frac{\pi}{4}$.

Exercice 2

Détermine la forme trigonométrique des nombres complexes suivants :

1. $z_1 = \sin \frac{\pi}{3} + i - i \cos \frac{\pi}{3}$.
2. $z_2 = 1 - \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}$.
3. $z_3 = 1 + e^{i\frac{\pi}{6}} + e^{i\frac{\pi}{3}} + e^{i\frac{2\pi}{3}}$.
4. $z_4 = \sin \frac{3\pi}{4} - i \sin \frac{5\pi}{4}$

Exercice 3

On donne l'équation (E): $z^3 - (1 + 4i)z^2 + (-9 + i)z - 6 + 18i = 0$.

1. Montre que l'équation (E) admet une solution réelle et une solution imaginaire pur dont-on déterminera.
2. Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation (E).
3. Soient A, B et C les points d'affixes respective les solutions de l'équation (E). Détermine la nature du triangle ABC.
4. Détermine une équation du cercle circonscrit au triangle ABC puis construis ce triangle.