

DEVOIR SURVEILLÉ 2024-2025

ÉPREUVE: MATHÉMATIQUES**CLASSE:** T.S.E**DURÉE:** 3HEURES**Exercice 1.**

On considère le polynôme défini par : $P(x) = 4x^3 - 4x^2 - x + 1$.

1. Calculer $P(x)$ pour $x = 1$ et en déduire une factorisation de $P(x)$.
2. Résoudre de $\mathbb{R}$ l'équation $P(x) = 0$.
3. Utiliser les résultats précédents pour résoudre les équations suivantes :

a) $4(\ln x)^3 - 4(\ln x)^2 - \ln x + 1 = 0$

b) $e^{-3x} + 4 = e^{-2x} + 4e^{-x}$

c) $2^{3x+2} - 2^{2x+2} - 2^x + 1 = 0$

d) $4(\log_2 x)^3 - 4(\log_2 x)^2 - \log_2 x + 1 = 0$

Exercice 2.

On considère les deux intégrales : $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 x}$ et $J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^4 x}$

1. Calculer I .
2. Soit la fonction numérique f définie sur $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$ par : $f(x) = \frac{\sin x}{\cos^3 x}$
 - (a) Montrer que : $f'(x) = \frac{3}{\cos^4 x} - \frac{2}{\cos^2 x}$
 - (b) Déterminer une relation entre I et J .
 - (c) En déduire la valeur de J .

Exercice 3.**Partie A :**

Soit la fonction g définie sur l'intervalle $] -1; +\infty[$ par : $g(x) = \frac{x}{x+1} - 2\ln(x+1)$

1. Calculer $g'(x)$, étudier son signe et en déduire le tableau de variation de g .
2. Calculer $g(0)$. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet exactement deux solutions dont l'une, que l'on désigne par α , appartient à l'intervalle $] -0,72; -0,71[$.
3. Donner le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x sur $]0; +\infty[$.

Partie B :

Soit la fonction f définie sur l'intervalle $] -1; 0[\cup]0; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{\ln(x+1)}{x^2}$.

1. Étude de f aux bornes de son ensemble de définition.
 - (a) Calculer les limites de $f(x)$ quand x tend vers 0 par valeurs inférieures et quand x tend vers 0 par valeurs supérieures.
 - (b) Calculer $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
2. Sens de variation et représentation graphique de f
 - (a) Calculer $f'(x)$ et déduire, à l'aide de la partie A, son signe.
 - (b) Montrer que $f(\alpha) = \frac{1}{2\alpha(\alpha+1)}$. En déduire une valeur approchée de $f(\alpha)$ en reprenant $\alpha = -0,715$.
 - (c) Dresser le tableau de variation de la fonction f .
 - (d) Représenter graphiquement la fonction f dans le plan rapporté à un repère orthonormal (unité graphique 2 cm).

3. Calcul d'une primitive de f :

Soit la fonction h définie sur $] -1; 0[\cup] 0; +\infty[$ par : $h(x) = \frac{\ln(x+1)}{x^2} - \frac{1}{x(x+1)}$

- (a) Déterminer les fonctions u et v telles que l'on puisse écrire $h(x) = u'(x).v(x) + u(x).v'(x)$ et en déduire une primitive de h .
- (b) Après avoir vérifié que $\frac{1}{x(x+1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$, déterminer une primitive de $\frac{1}{x(x+1)}$.
- (c) Dédire des questions précédentes, une primitive de f .