

DEVOIR SURVEILLE DE MATHEMATIQUES

SERIE :TSE

DUREE :03H

COEFF :05

EXERCICE 1 :.....4pts

I.Détermine le module et un argument de chacun des nombres complexes suivants :

$$z_1 = \frac{i^{2024}}{(-1-i)(\sqrt{3}-i)^8}, z_2 = 1 - \cos \theta - i \sin \theta ; \theta \in \mathbb{R}; \quad z_3 = \frac{(-1+i\sqrt{3})(\cos \theta + i \sin \theta)}{\cos \theta + \sin \theta + i(\cos \theta - \sin \theta)} \quad \theta \in \mathbb{R}$$

II.Ecris sous forme algébrique les nombres complexes suivants :

$$Z_1 = \frac{2\sqrt{3} + 22 + (22\sqrt{3} - 2)i}{2 + 22i}; Z_2 = (1 - i)^{12}(\sqrt{3} - 3i); \quad Z_3 = 3e^{i\frac{5\pi}{6}} + \frac{(1 + i)^8}{-3i(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4})}$$

III.Linéarise : $\cos^3 3\theta \times \sin 7\theta$

EXERCICE 2 :.....6pts

I.On pose $U = e^{i\frac{2\pi}{7}}$, $S = U + U^2 + U^4$ et $T = U^3 + U^5 + U^6$

1) Calcule U^7

2) Démontre que S et T sont conjugués, et que la partie imaginaire de S est positive

3) Calcule $S + T$ et $S \times T$ puis S et T .

II.Les points A, B, M , et M' du plan complexe ont pour affixes respectives : $2 - 4i$; $-i$; z et z' avec $z' = \frac{-iz - 2 + 4i}{z + i}$

1) Exprime les coordonnées $(x'; y')$ de M' en fonction de celles $(x; y)$ de M .

2) Détermine et représente l'ensemble des points M tels que :

a) z' soit réel

b) z' soit imaginaire pur

3) On pose $Z = z + i$ et $Z' = z' + i$

a) Vérifie que $ZZ' = -3 + 4i$ puis calcule $|ZZ'|$

b) Déterminez l'ensemble des points M' lorsque M décrit un cercle de centre B et de rayon $r > 0$.

c) Déterminez r pour que M et M' soient sur le même cercle

PROBLEME :.....10pts

PARTIE A : (5pts)

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{e}_1; \vec{e}_2)$, on considère le polynôme $f(z) = z^4 + (2 - 2\sqrt{3})z^3 + (30 - 4\sqrt{3})z^2 + (8 - 52\sqrt{3})z + 104$

1) Soit z_0 un nombre complexe.

Montre que si z_0 est solution de l'équation $f(z) = 0$, alors $\bar{z}_0$ l'est aussi

2) Calcule $f(-1 + 5i)$. Que conclure ?

3) Déduis-en la résolution dans $\mathbb{C}$ de l'équation $f(z) = 0$

4) Soit $L; B; G$ et O les points images respectives des solutions de l'équation $f(z) = 0$ tels que : $Re(z_L) > 0$; $Im(z_L) < 0$; $0 < |z_L| < 3$; $Re(z_B) > 0$; $Im(z_B) > 0$;

$Im(z_G) > 4$ et z_O la quatrième solution.

a) Place ces points le plan complexe.

b) Soit I le point d'affixe $z_I = -1 + i$. Calcule $\frac{z_B - z_I}{z_G - z_I}$. En déduis la nature du triangle BGI .

c) Détermine la nature, le périmètre et la surface du quadrilatère $LBGO$

d) Montre que les points $LBGO$ sont sur le même cercle dont on précisera son centre et son rayon.

PARTIE B. (5pts)

On pose $E = \mathbb{C} - \{-i\}$ où $\mathbb{C}$ est l'ensemble des nombres complexes ; f l'application de E dans $\mathbb{C}$ définie par $z \mapsto f(z) = \frac{iz}{z+i}$. Soit M le point d'affixe z dans le plan complexe muni du repère orthonormal $(O; \vec{u}; \vec{v})$

1) Détermine les coordonnées du point B d'affixe z_0 telle que $f(z_0) = 1 + 2i$

2) Soit z élément de E . On désigne par r le module de $z + i$ et θ une mesure de son argument.

Exprime la forme trigonométrique de $f(z) - i$ en fonction de r et de θ .

3) Soit A le point d'affixe $-i$.

a) Détermine l'ensemble (Δ) des points M dont l'affixe z vérifie $|f(z) - i| = \sqrt{2}$ et l'ensemble (Δ') des points M d'affixe z tels que $\frac{\pi}{4}$ soit une mesure de l'argument de $f(z) - i$.

b) Montre que B appartient à (Δ) et (Δ') . Construis (Δ) et (Δ')

NB : les parties A et B sont indépendantes.

BONNE CHANCE DANS LA RIGUEUR ET L'EFFORT PERSONNEL

CORRECTION DU DEVOIR N 1

EXERCICE 1 :

I. Déterminons le module et un argument :

$$z_1 = \frac{i^{2024}}{(-1-i)(\sqrt{3}-i)} = \frac{1}{\sqrt{2}e^{\frac{i5\pi}{4}} \times 2^8 e^{-\frac{i8\pi}{6}}} = \frac{\sqrt{2}e^{i(-\frac{5\pi}{4}+\frac{4\pi}{3})}}{2^8 \times 2} = \frac{\sqrt{2}}{512} e^{\frac{i\pi}{12}}$$

$$D' \text{ où } z_1 = \left[\frac{\sqrt{2}}{512}; \frac{\pi}{12} \right]$$

$$z_2 = 1 - \cos\theta - i\sin\theta = 2\sin^2\frac{\theta}{2} - 2i\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} = 2\sin\frac{\theta}{2}\left(\sin\frac{\theta}{2} - i\cos\frac{\theta}{2}\right) = 2\sin\frac{\theta}{2}e^{i(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{2})}$$

$$D' \text{ où } z_2 = \left[2\sin\frac{\theta}{2}; \frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{2} \right] \text{ pour } \frac{\theta}{2} \in]2k\pi; \pi + 2k\pi[; k \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{aligned} z_3 &= \frac{(-1+\sqrt{3})(\cos\theta + i\sin\theta)}{\cos\theta + \sin\theta + i(\cos\theta - \sin\theta)} = \frac{2e^{i\frac{2\pi}{3}} \times e^{i\theta}}{2e^{i(\frac{2\pi}{3}+\theta)}} \\ &= \frac{e^{-i\theta}}{\cos\theta - i\sin\theta + i(\cos\theta - \sin\theta)} = \frac{e^{-i\theta}}{(cos\theta - i\sin\theta)(1+i)} = \frac{2e^{i(\frac{2\pi}{3}+\theta)}}{e^{-i\theta}\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}} = \frac{2}{\sqrt{2}}e^{i(\frac{2\pi}{3}+\theta+\theta-\frac{\pi}{4})} \\ &= \sqrt{2}e^{i(\frac{5\pi}{12}+2\theta)} \end{aligned}$$

$$D' \text{ où } z_3 = \left[\sqrt{2}; \frac{5\pi}{12} + 2\theta \right]$$

II. Ecrivons sous forme algébrique les nombres complexes :

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{2\sqrt{3} + 22 + (22\sqrt{3} - 2)i}{2 + 22i} = \frac{[2\sqrt{3} + 22 + (22\sqrt{3} - 2)i](2 - 22i)}{(2 + 22i)(2 - 22i)} \\ &= \frac{4\sqrt{3} - 44i\sqrt{3} + 44 - 484i + 2(22\sqrt{3} - 2)i - 22i(22\sqrt{3} - 2)i}{4 + 484} \\ &= \frac{4\sqrt{3} - 44i\sqrt{3} + 44 - 484i + 44i\sqrt{3} - 4i + 484\sqrt{3} - 44}{488} = \frac{488\sqrt{3} - 488i}{488} = \sqrt{3} - i \end{aligned}$$

$$D' \text{ où } z_1 = \sqrt{3} - i$$

$$z_2 = (1-i)^{12}(\sqrt{3}-3i) = (-2i)^6(\sqrt{3}-3i) = -64(\sqrt{3}-3i) = -64\sqrt{3} + 192i$$

$$D' \text{ où } z_2 = -64\sqrt{3} + 192i$$

$$\begin{aligned} z_3 &= 3e^{i\frac{5\pi}{6}} + \frac{(1+i)^8}{-3i(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4})} = 3\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) + \frac{(2i)^4}{-3i\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)} \\ &= -\frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i + \frac{16}{\frac{-3i\sqrt{2}}{2} + \frac{3\sqrt{2}}{2}} = -\frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i + \frac{32}{3\sqrt{2} - 3i\sqrt{2}} = -\frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i + \frac{32(3\sqrt{2} + 3i\sqrt{2})}{(3\sqrt{2})^2 + (3\sqrt{2})^2} \\ &= -\frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i + \frac{96\sqrt{2} + 96\sqrt{2}i}{18 + 18} = \frac{-54\sqrt{3} + 54i + 96\sqrt{2} + 96\sqrt{2}i}{36} \\ &= \frac{-54\sqrt{3} + 96\sqrt{2}}{36} + \frac{54 + 96\sqrt{2}i}{36} = \frac{-9\sqrt{3} + 16\sqrt{2}}{6} + \frac{9 + 16\sqrt{2}i}{6} \end{aligned}$$

$$D' \text{ où } z_3 = \frac{-9\sqrt{3} + 16\sqrt{2}}{6} + \frac{9 + 16\sqrt{2}i}{6}$$

$$III. \text{ Linéarisons : } \cos^3 3\theta \times \sin 7\theta = \left(\frac{e^{7i\theta} - e^{-7i\theta}}{2i}\right)\left(\frac{e^{3i\theta} + e^{-3i\theta}}{2}\right)^3 =$$

$$\left(\frac{e^{7i\theta} - e^{-7i\theta}}{2i}\right)\left(\frac{e^{9i\theta} + 3e^{3i\theta} + 3e^{-3i\theta} + e^{-9i\theta}}{8}\right)$$

$$= \frac{1}{16i}(e^{16i\theta} + 3e^{10i\theta} + 3e^{4i\theta} + e^{-2i\theta} - e^{2i\theta} - 3e^{-4i\theta} - 3e^{-10i\theta} - e^{-16i\theta})$$

