

Exercice 1 : (6points)

1) Détermine le module et un argument des complexes suivants :

$$z_1 = \frac{(\sqrt{3}+i)^9(1-i)}{-8(1+i)^5}, \quad z_3 = \frac{(1+i\sqrt{3})(\cos \alpha + i \sin \alpha)}{\cos \alpha + i \sin \alpha + i(\cos \alpha - \sin \alpha)} \quad \text{avec } \alpha \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right],$$

$$\begin{cases} |z_3(3 - i\sqrt{3})^3| = 6 \\ \arg\left(\frac{(3-i\sqrt{3})^3}{2iz_3}\right) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}, \quad z_4 = i \sin \frac{2\pi}{3} + 1 + \cos \frac{\pi}{3}.$$

2) Soit θ réel tel que $0 \leq \theta \leq \pi$ et $z = -\sin 2\theta + 2i \cos^2 \theta$.

a. Détermine les modules et les arguments de z .

b. Détermine θ pour que z et $z - 1$ aient le même module.

3) a. Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - (2^{\theta+1} \cos \theta)z + 2^\theta = 0$ où $\theta \in [0; 2\pi[$.

Donne chaque solution sous forme trigonométrique.

b. On appelle A et B les images dans le plan complexe des solutions de l'équation précédentes. Détermine θ pour que OAB soit un triangle équilatéral.

Exercice 2 : (5points)

I. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E): $z^2 + \sqrt{3}z + 1 = 0$.

II. Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$, on considère les points A ; B ; C et D d'affixes respectifs :

$$a = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i; \quad b = 2 + \sqrt{3} + i; \quad c = \bar{b}; \quad d = b^{12}.$$

1) Ecris a sous forme exponentielle puis montre que $|b| = \sqrt{8 + 4\sqrt{3}}$.

2) Soit r la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{6}$.

a. Montre que B est l'image du point C par la rotation r .

b. Montre que $\arg(b) \equiv \frac{\pi}{12} [2\pi]$.

3) Soit e l'affixe du point E l'image de B par la translation T du vecteur $\vec{v}$.

a. Montre que $\frac{d}{e-b} = i(8 + 4\sqrt{3})^6$.

b. Dédus-en que les droites (BE) et (OD) sont perpendiculaires.

4) Détermine l'ensemble des points M d'affixe z qui vérifie :

$$|\bar{z} - 2 - \sqrt{3} - i| = 5.$$

Exercice 3 : (9points)

Les parties I et II sont indépendantes.

- I.** 1) On considère le polynôme P pour tout z de l'ensemble $\mathbb{C}$ par :
- $$P(z) = z^3 - 6z^2 + 12z - 16.$$
- Soit $z_0 \in \mathbb{C}$, prouve que si $P(z_0) = 0$ alors $P(\bar{z}_0) = 0$ où $\bar{z}_0$ est le conjugué de z_0 .
 - Calcule $P(1+i\sqrt{3})$. Déduis-en une, puis deux solutions de l'équation $P(z) = 0$.
 - Donne une factorisation de $P(z)$.
 - Déduis-en les solutions de l'équation $P(z) = 0$.
- 2) Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{u}; \vec{v})$ (unité graphique 2cm). Soient A, B et C d'affixes respectives : $a = 4, b = 1+i\sqrt{3}$ et $c = \bar{b}$.
- Place les points A, B et C sur le repère orthonormé $(O; \vec{u}; \vec{v})$.
 - Quelle est la nature exacte du triangle ABC ?
- II.** Soit f l'application de $E = \mathbb{C} - \{i\}$ dans $\mathbb{C}$ définie par $f: z \mapsto f(z) = \frac{iz}{z+i}$. Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormal direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$ on note M le point d'affixe z .
- Détermine les coordonnées du point B dont l'affixe z_0 est telle que $f(z_0) = 1 + 2i$.
 - Soit z un élément de E. On note r le module de $z + i$ et α une mesure de son argument. Exprime la forme trigonométrique de $f(z) - i$ en fonction de r et α .
 - Soit A le point d'affixe $-i$.
 - Détermine l'ensemble $\mathcal{T}$ des points M vérifiant $|f(z) - i| = \sqrt{2}$ et l'ensemble D des points M tels que $\frac{\pi}{4}$ soit une mesure de $f(z) - i$.
 - Montre que B appartient à $\mathcal{T}$ et D et construis $\mathcal{T}$ et D.