

Devoir surveillé de la deuxième période 2024-2025			
Epreuve de Mathématiques			
LSABABU /AEBKO-RD	SERIE : TSE	Durée : 3 heures	Coefficient : 5

Exercice 1 :(5pts)

I. On considère la similitude indirecte (S) : $z' = 2i\bar{z} + \frac{1+i}{2}$

- 1) Détermine le rapport et le centre de la similitude (S).
- 2) Détermine une équation cartésienne de l'axe (Δ) de (S).

II. Pour tout entier naturel, on pose : $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^{2n}x} dx$.

- 1) Calcule I_0 et I_1 .
- 2) A l'aide d'une intégration par parties, montre que $\forall n \in \mathbb{N}^*, I_n = \frac{2^{n-1}}{2n-1} + \frac{2n-2}{2n-1} I_{n-1}$.
- 3) Calcule alors l'intégrale $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^4 x} dx$.
- 4) Calcule l'intégrale $A = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(1 + \frac{1}{\cos^2 x}\right)^2 dx$.

Exercice 2 :(5pts)

I. 1) Calcule $I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1+\cos 4x}{\cotan x - \tan x} dx$

2) Démontre que $\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx = \frac{\pi}{2}$

II. On considère les intégrales suivantes

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+2}} \quad ; \quad J = \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^2+2}} dx \quad \text{et} \quad K = \int_0^1 \sqrt{x^2+2} dx$$

- 1) Soit la fonction f définie sur $[0; 1]$ par $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+2})$.
 - a) Calcule la dérivée de f .
 - b) Calcule la valeur de I .
- 2) a) vérifie que $J + 2I = k$.
 - b) Montre que $k = \sqrt{3} - J$
 - c) Déduis-en les valeurs de J et de K .

Problème :(10pts)

Partie A

Soit g la fonction définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par $g(x) = \frac{2x+1}{x(x+1)} - 2\ln \left|1 + \frac{1}{x}\right|$.

- 1) Détermine D_g .

2) Calcule la limite de g en $-\infty$ puis en $+\infty$.

3) a) Démontre que $\forall x \in D_g, g'(x) = \frac{-1}{(x^2+x)^2}$.

b) Étudie le sens de variations de g .

4) a) Calcule $g\left(-\frac{1}{2}\right)$.

b) Justifie que $\forall x \in]-\infty; -1[\cup]-\frac{1}{2}; 0[\quad g(x) < 0$

$$\forall x \in]-1; -\frac{1}{2}[\cup]0; +\infty[\quad g(x) > 0$$

Partie B

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} - \{-1\}$ par $f(x) = x - x^2 \ln \left| 1 + \frac{1}{x} \right|$, si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$.

On note (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal $(O; I; J)$, unité graphique $OI = 1\text{cm}$ et $OJ = 4\text{cm}$.

1) a) Étudie le sens de variation de chacune des fonctions h et k définies sur $[0; +\infty[$ par :

$$h(t) = \ln(1+t) - t + \frac{t^2}{2} \text{ et } k(t) = \ln(1+t) - t + \frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{2}.$$

b) Démontre que $\forall x \in [0; +\infty[, \quad t - \frac{t^2}{2} \leq \ln(1+t) \leq t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{2}$.

c) Déduis-en que $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{t - \ln(1+t)}{t^2} = \frac{1}{2}$

2) En utilisant les résultats précédents, démontre que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{1}{2}$ puis déduis-en une interprétation graphique.

3) Calcule la limite de f en -1 puis déduis-en une interprétation graphique.

4) Démontre que f est continue en 0.

5) Démontre que f est dérivable en 0 et que $f'(0) = 1$.

6) Exprime $f'(x)$ en fonction de $g(x)$.

7) Précise le sens de variation de f puis dresse son tableau de variation.

8) Trace les asymptotes éventuelles de (C) puis construis (C) .