

Devoir 1^{er} Trimestre de : mathématiques

<u>Classe</u> : TSE	<u>Durée</u> : 2H	<u>Coefficient</u> : 05	<u>Date</u> : 22/11/2024
---------------------	-------------------	-------------------------	--------------------------

EPREUVE : mathématiques**Exercice 1 : 6 points**

Soit $P(z) = z^3 - (4 + 6i)z^2 - (12 - 24i)z + 32 - 24i$.

1. Résous dans $\mathbb{C}$, l'équation : $z^2 - (2 + 6i)z - 16 + 12i = 0$.
2. Montre que l'équation $P(z) = 0$ admet une solution réelle notée z_0 que l'on déterminera.
3. Détermine a, b et c trois nombres complexes tels que $P(z) = (z - z_0)(az^2 + bz + c)$.
4. Résous dans $\mathbb{C}$, l'équation $P(z) = 0$.
5. Place les points images des solutions dans un repère $(o; \vec{i}; \vec{j})$.

Exercice 2 : 6 points

I. Détermine le module et un argument de : $z = \frac{1 - e^{i\frac{\pi}{3}}}{1 + e^{i\frac{\pi}{3}}}$

II. On considère le nombre complexe : $z = \sqrt{3} + 1 + i(\sqrt{3} - 1)$.

1. Ecris z^2 sous forme algébrique.
2. Détermine le module et un argument de z^2 .
3. En déduis de ce qui précède le module et un argument de z .
4. En déduis les valeurs exactes de $\cos \frac{\pi}{12}$ et $\sin \frac{\pi}{12}$.
5. Résous dans $\mathbb{R}$ l'équation $(\sqrt{3} + 1) \cos x + (\sqrt{3} - 1) \sin x = \sqrt{2}$.

Exercice 3 : 8 points

1. Soit l'équation $(E) : 2(1 + \cos 2\alpha)z^2 - 2(\sin 2\alpha)z + 1 = 0$.

a) Vérifie que $(\sin 2\alpha)^2 - 2(1 + \cos 2\alpha) = -4 \cos^4 \alpha$.

b) Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) .

2. a) Détermine les racines 7^{ième} de l'unité sous forme exponentielle.

b) Soit $w = e^{i\frac{2\pi}{7}}$.

b₁) Calcule $1 + w + w^2 + w^3 + w^4 + w^5 + w^6$.

b₂) Montre que $1 + 2 \cos \frac{2\pi}{7} + 2 \cos \frac{4\pi}{7} + 2 \cos \frac{6\pi}{7} = 0$.