

Devoir de Mathématiques du 07 Janvier 2025

Classe : TSE

Durée : 2 h 30 mn

Coefficient : 5

Questions de Cours 6 points

A. Pour un nombre complexe non nul z de partie imaginaire négative, quelles sont les racines δ_1 et δ_2 de z ? Parmi les nombres complexes : $a = 1 + i$ et $b = -i$, Donne les racines carrées qui correspondent à la question posée.

B. Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$. On prendra pour le graphique $\|\vec{u}\| = 4\text{cm}$.

M est un point d'affixe z non nul. On désigne par M' le point d'affixe z' telle que : $z' = \frac{1}{z}$ où $\bar{z}$

désigne le conjugué du nombre complexe z .

1. Soit z un nombre complexe non nul.

a. Détermine une relation entre $|z|$ et $|z'|$, puis une relation entre les arguments de z et z'

b. Démontre que les points O , M et M' sont alignés.

c. Démontre que l'égalité : $\overline{z' + 1} = \frac{1}{z}(z + 1)$.

2. On désigne par A et B les points d'affixes respectives 1 et -1 . On note C l'ensemble des points du plan dont l'affixe vérifie : $|z + 1| = 1$

a. Quelle est la nature de l'ensemble C ?

b. Soit M un point de C d'affixe z , distinct du point O .

• Démontre que $|z' + 1| = |z'|$. Interprète géométriquement cette égalité.

• Est-il vrai que si z' vérifie l'égalité $|z' + 1| = |z'|$, alors z vérifie l'égalité $|z + 1| = 1$?

• Trace l'ensemble C sur une figure.

• Si M est un point de C , décrire et réaliser la construction du point M' .

Évaluation 1 6 points

1. Détermine le module et un argument du nombre complexe z tel que :

$$z = -(\sin x + \sin 2x) + i(1 + \cos x + \cos 2x)$$

2. Démontre que, pour tous nombres complexes u et u' de module 1 vérifiant $uu' + 1 \neq 0$, le nombre complexe $Z = \frac{u + u'}{1 + uu'}$ est un nombre réel.
3. Linéarise l'expression : $\left[\cos^2\left(\frac{3}{2}\theta\right) - \sin^2\left(\frac{3}{2}\theta\right) \right] \times \cos(3\theta)$.
4. Pour tout complexe z différent de i , on pose : $z' = \frac{iz - 1}{z - i}$. Prouve que $z' \in \mathbb{R} \Leftrightarrow |z| = 1$.

Évaluation 2 8 points

- A. 1. Montre que $z^3 - 1 = (z - 1)(z^2 + z + 1)$ puis déduis-en les solutions dans $\mathbb{C}$ de $z^3 - 1 = 0$.
2. On désigne par j le complexe : $-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$
 - a. Calcule j^2, j^3, j^{2025}
 - b. Calcule $S = 1 + j + j^2 + \dots + j^{2025}$.
- B. Dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, on considère le polynôme complexe défini par : $f(z) = z^3 - 4z^2 + 6z - 4$.
 1. Montre que l'équation $f(z) = 0$ admet une solution réelle z_0 que l'on déterminera.
 2. Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation $f(z) = 0$. On notera z_1 et z_2 les deux autres solutions où $\text{Im}(z_1) > 0$.
 3. Représente dans le plan complexe les points $M_0; M_1; M_2$ d'affixes respectives $z_0; z_1; z_2$. Montre que le triangle $M_0M_1M_2$ est rectangle.
 4. a. Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 = z_1$. on déterminera solutions sous forme algébrique et trigonométrique. Deduis-en les valeurs exactes de $\cos\frac{\pi}{8}; \sin\frac{\pi}{8}$ et $\tan\frac{\pi}{8}$.
 - b. Calcule z_1^{20} .