



Lycée Privé MAMA THIAM

DEVOIR DE MATHÉMATIQUES

Série : TSE Durée : 2 Heures

Exercice 1 :

I/-On considère le polynôme P défini par :

$$P(z) = z^4 - 6z^3 + 24z^2 - 18z + 63.$$

1° a) Calculer $P(i\sqrt{3})$ et $P(-i\sqrt{3})$.

b) Factoriser $P(z)$ en produit de deux polynômes de second degré.

2° Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$.

3° a) Placer dans le plan complexe rapporté au repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$, les points

A, B, C, D , d'affixes respectives $z_A = i\sqrt{3}$, $z_B = -i\sqrt{3}$, $z_C = 3 + 2i\sqrt{3}$

et $z_D = \overline{z_C}$.

b) Montrer que ces quatre points appartiennent à un même cercle.

4° On note E le symétrique de D par rapport à O .

a) Calculer $\frac{z_C - z_B}{z_E - z_B}$.

b) En déduire la nature du triangle BEC .

II/- Soit a un réel appartenant à $[0; 2\pi]$

a) Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation d'inconnue z :

$$z^2 - (2^{a+1} \cos a)z + 2^{2a} = 0 \quad (1)$$

Donner la forme trigonométrique de chaque solution.

b) Dans le plan complexe, on désigne par A et B les points d'affixes les solutions de l'équation (1). Déterminer a pour que le triangle OAB soit équilatéral

Exercice 2 :

Les points A, B, M et M' du plan complexe ont pour affixes respectives: $2 - 4i, -i,$

z et z' avec $z' = \frac{-iz - 2 + 4i}{z + i}$

1°/ Exprimez les coordonnées (x', y') de M' en fonction de celles $(x; y)$ de M .

2°/ Déterminez et représentez l'ensemble des points M tels que :

a) z' soit réel.

b) z' soit imaginaire pur.

3°/ On pose $Z = z + i$ et $Z' = z' + i$. Vérifiez que $ZZ' = -3 + 4i$.

Puis calculez $|ZZ'|$.

4°/ a) Déterminez l'ensemble des points M' lorsque M décrit un cercle de centre B et de rayon $r > 0$.

b) Déterminez r pour que M et M' soient sur le même cercle.

Exercice 3 :

I) On donne le nombre complexe $z = \cos \frac{2\pi}{5} + i \sin \frac{2\pi}{5}$

1) vérifier que $z^5 - 1 = 0$. En déduire la relation $1 + z + z^2 + z^3 + z^4 = 0$

2) a) Exprimer z^2, z^3 , et z^4 sous forme trigonométrique.

b) Démontrer les égalités suivantes :

$$z + z^4 = 2 \cos \frac{2\pi}{5} \text{ et } z^2 + z^3 = 2 \cos \frac{4\pi}{5}$$

3) Utiliser les résultats des questions 1 et 2 pour trouver une relation entre $\cos \frac{2\pi}{5}$ et $\cos \frac{4\pi}{5}$ puis montrer que $\cos \frac{2\pi}{5}$ est racine de l'équation $4x^2 + 2x - 1 = 0$, En

déduire la valeur exacte de $\cos \frac{2\pi}{5}$

4) Soit l'équation $(E') : (z - 1)^5 = (z + 1)^5$ ($z \in \mathbb{C}$)

a) Démontrer que si z_0 est solution de (E') alors $\left| \frac{z_0 - 1}{z_0 + 1} \right| = 1$

En déduire que les solutions de (E') sont imaginaires pures.

b) Résoudre (E') .

II) Soit z le nombre complexe défini par : $z = \cos \frac{2\pi}{7} + i \sin \frac{2\pi}{7}$

Soit $S = z + z^2 + z^4$ et $T = z^3 + z^5 + z^6$

a. Montrer que $S = \bar{T}$ et que $\text{Im}(S) > 0$.

b. Calculer $S + T$ et $S \times T$; en déduire S et T .