

**EXERCICE1****5points**

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$. On désigne par I le point d'affixe $z_I = 1$, par A le point d'affixe $z_A = 1 - 2i$, par B le point d'affixe $z_B = -2 + 2i$ et par (C) le cercle de diamètre $[AB]$.

On fera une figure que l'on complétera avec les différents éléments intervenant dans l'exercice. On prendra pour unité graphique 2cm

1. Détermine z_Ω l'affixe du centre Ω du cercle (C) et calcule son rayon. (1pt)

2. Soit D le point d'affixe $z_D = \frac{3+9i}{4+2i}$

Ecris z_D sous forme algébrique et montre que D appartient au cercle (C). (1pt)

3. Soit E le point du cercle (C) tel que $(\overrightarrow{\Omega I}; \overrightarrow{\Omega E}) = \frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

a) Détermine le module et un argument de $z_E + \frac{1}{2}$ (1pt)

b) Dédus-en l'affixe z_E de E. (0,5pt)

4. Soit f l'application du plan p dans lui-même, qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que :

$$z' + \frac{1}{2} = e^{i\frac{\pi}{4}} \left(z + \frac{1}{2} \right)$$

a) Détermine la nature de f et ses éléments caractéristiques. (0,75pt)

b) Soit K le point d'affixe $z_K = 2$

Détermine par le calcul l'image K' de K par f . (0,25pt)

EXERCICE 2/**5points**

On considère, dans l'ensemble des nombres complexes l'équation suivante :

$$(E_n): (iz)^n = (z + 2i)^n \text{ Où } n \text{ est un entier supérieur ou égal } 2.$$

1.a) Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation (E_2) .

Ecris sous forme trigonométrique les solutions z_1 et z_2 de l'équation (E_2) , où z_1 est la solution telle que $\text{Re}(z_1) < 0$ (0,75pt)

b) On pose $u = -\frac{\sqrt{2}}{2} z_1$. Montre que $\forall p \in \mathbb{N}, (u)^p + (\bar{u})^p = 2 \cos\left(\frac{p\pi}{4}\right)$ (où $\bar{u}$ est le conjugué de u). (0,5pt)

c) On considère l'application f définie dans l'ensemble des complexes $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ par

$$f(z) = \sum_{p=0}^n C_n^p z^p \cos\left(\frac{p\pi}{4}\right)$$

Montre que $f(z) = \frac{1}{2} [(1+uz)^n + (1+\bar{u}z)^n]$ (1pt)

d. Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation : $f(z) = 0$ (1pt)

2. On considère dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{u}; \vec{v})$, les deux points A d'affixe $-2i$ et M d'affixe z .

- a) Montre que si z est solution de (E_n) alors $OM = AM$. (0,5pt)
- b) Déduis-en que toute solution de (E_n) peut s'écrire sous la forme $a - i$ où a est un réel.
- 3.a) Résous dans C l'équation (E_n) . (0,75pt)
- b) Montre que les solutions de (E_n) peuvent s'écrire sous la forme : (0,5pt)
- $$z_k = -i + \tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{k\pi}{n}\right) \text{ avec } k \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$$

PROBLEME/

9,5points

A/ Le plan complexe est rapport   à un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$, soit F la transformation du plan p dans lui-même qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' définie par : $z' = (1+i)\bar{z} + i$

Donne la nature et les éléments caractéristiques de la transformation F . (1,5pt)

B/I/ Le plan complexe est rapport   à un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$ (l'unité graphique 1cm). On considère dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation $(E) : z^3 + (-8+i)z^2 + (17-8i)z + 17i = 0$.

1. Montre que $-i$ est une solution de l'équation (E) . (0,5pt)

2. Détermine les réels a, b et c tels que :

$$z^3 + (-8+i)z^2 + (17-8i)z + 17i = (z+i)(z^2 + az + b) \quad (1\text{pt})$$

3. Résous dans C l'équation (E) . (1pt)

II/ On appelle A, B et C les points d'affixes respectives $z_A = 4+i, z_B = 4-i$ et

$$z_C = -i$$

1. Place les points A, B et C sur une figure que l'on compl  tera dans la suite de l'exercice. (0,5

2. Le point Ω est le point d'affixe $z_\Omega = i$. On appelle D l'image de A par la rotation de centre Ω et d'angle de mesure $\frac{\pi}{2}$.

Calcule l'affixe z_D de D . (0,5pt)

3. Démontre que les points B, A, D, C appartiennent à un même cercle (c_1) de centre Ω dont on déterminera le rayon. Trace (c_1) . (1,25pt)

4.    tout point M d'affixe $z \neq 2$ on associe le point M' d'affixe $z' = \frac{iz + 10 - 2i}{z - 2}$

a) Détermine les affixes des points A', B', C' associés respectivement aux points A, B, C . (0,75pt)

b) Vérifie que A', B', C' appartiennent à un même cercle (c_2) de centre p d'affixe i .

Détermine son rayon et trace (c_2) . (0,75pt)

c) Démontre que pour tout nombre complexe $z \neq 2$, $|z' - i| = \frac{10}{|z - 2|}$ (0,75pt)

d) Démontre que lorsque M décrit le cercle (c_1) alors M' décrit le cercle (c_3) de centre p et de rayon que l'on déterminera. Trace (c_3) . (1pt)